8/11

1932 № 5

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК
СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

VII СЕРИЯ

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
DE L'UNION DES RÉPUBLIQUES SOVIÉTIQUES SOCIALISTES

VII SÉRIE

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

IMPERIAL MYCOLOGICAL INSTITUTE
10 OCT 1932

ЛЕНИНГРАД — LENINGRAD
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

ПРИМЕР СТАНДАРТНОЙ ЦИТАТЫ · EXEMPLE DE CITATION

Б. И. Сегал. Об одной аддитивной проблеме.
ИМЕН, 1932, № 5, стр. 657.

B. Segal. Sur un problème additif.
BAS-MN, 1932, № 5, p. 657 (en russe).

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Июнь 1932 г.

Непременный Секретарь академик *В. Волтерра*

Редактор издания академик-секретарь ОМЕН А. А. Борисяк

Технический редактор Л. А. Федоров
Ученый корректор Г. А. Стратановский

Сдано в набор в апреле 1932 г. — Подписано к печати 22 июня 1932 г.

140 (595—734) стр. (18 фиг.)
Формат бум. 72 × 110 см. — 9 печ. л. — 42 000 тип. зн. в печ. л. — Тираж 2000
Ленгорлит № 46771. — АНИ № 196. — Заказ № 1211
Типография Академии Наук СССР, В. О., 9 линия, 12

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932.
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПЕРЕМЕЩАЮЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ В МЕТОДЕ АКАДЕМИКА А. Н. КРЫЛОВА

Н. Н. ЛУЗИНА

Часть первая

В предыдущей нашей статье: «О методе академика А. Н. Крылова составления векового уравнения», помещенной в «Известиях Академии Наук СССР» за 1931 г. (№ 7), мы уже указали на первые свойства перемещающего множителя. В настоящем имеется в виду продолжить его изучение.

Для обозначений, нумерации формул и сущности рассмотрений мы отсылаем читателя к работе самого акад. А. Н. Крылова: «О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем» (см. «Известия Академии Наук СССР» за 1931 г., № 4) и к нашей цитированной статье.

§ 1. В этой последней мы, на ряду с заданной произвольной матрицей A

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kk} \end{matrix} \right\| \qquad (A)$$

рассматривали также и ее преобразование A^*, определенное символическим равенством

$$A^* = B^{-1} AB \qquad (81)$$

и выполненное при помощи некоторой другой матрицы B

$$B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2k} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} & \dots & b_{kk} \end{Vmatrix} \tag{73}$$

также произвольной во всех отношениях, за исключением того непременного требования, чтобы ее определитель $|B|$ был строго отличен от нуля, $|B| \neq 0$.

Обозначим, как это было сделано ранее, чрез M перемещающий множитель для матрицы A и, аналогично, чрез M^* перемещающий множитель для матрицы A^*. Согласно определению, мы будем иметь

$$M = \begin{vmatrix} a & b & c & \dots & f \\ a_1 & b_1 & c_1 & \dots & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1} & b_{k-1} & c_{k-1} & \dots & f_{k-1} \end{vmatrix} \tag{I}$$

и, аналогично

$$M^* = \begin{vmatrix} a^* & b^* & c^* & \dots & f^* \\ a_1^* & b_1^* & c_1^* & \dots & f_1^* \\ a_2^* & b_2^* & c_2^* & \dots & f_2^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1}^* & b_{k-1}^* & c_{k-1}^* & \dots & f_{k-1}^* \end{vmatrix} \tag{86}$$

где стоящие в первых строках $a, b, c, \dots, f$ и $a^*, b^*, c^*, \dots, f^*$ суть *параметры* перемещающих множителей, т. е. произвольные постоянные, и где каждая следующая строка выводится из предыдущей применением к этой

последней одной и той же самой подстановки: у определителя M применением подстановки A' и, соответственно, у определителя M^* применением подстановки $(A^*)'$; здесь знаком $'$ обозначается действие перевертывания матрицы, т. е. замена строчек на столбцы и обратно.

Параметры перемещающих множителей суть произвольные постоянные, не зависящие друг от друга; но если численные величины новых параметров $a^*, b^*, c^*, \ldots, f^*$ будут связаны с численными величинами старых параметров $a, b, c, \ldots, f$ тем условием, что первые будут выводимы из вторых помощью подстановки B', т. е. если мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned} a^* &= b_{11}a + b_{21}b + b_{31}c + \cdots + b_{k1}f \\ b^* &= b_{12}a + b_{22}b + b_{32}c + \cdots + b_{k2}f \\ c^* &= b_{13}a + b_{23}b + b_{33}c + \cdots + b_{k3}f \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f^* &= b_{1k}a + b_{2k}b + b_{3k}c + \cdots + b_{kk}f \end{aligned}\right\} \qquad (92)$$

то тогда, как мы видели ранее, будет иметься важное тождество

$$\begin{Vmatrix} a & b & c & \ldots & f \\ a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & f_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k-1} & b_{k-1} & c_{k-1} & \ldots & f_{k-1} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \ldots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \ldots & b_{2k} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \ldots & b_{3k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} & \ldots & b_{kk} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} a^* & b^* & c^* & \ldots & f^* \\ a_1^* & b_1^* & c_1^* & \ldots & f_1^* \\ a_2^* & b_2^* & c_2^* & \ldots & f_2^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k-1}^* & b_{k-1}^* & c_{k-1}^* & \ldots & f_{k-1}^* \end{Vmatrix} \qquad (III)$$

и показывающее, что численные величины перемещающих множителей M и M^* окажутся в этом случае связанными соотношением

$$M^* = |B| \cdot M. \qquad (94)$$

Так как определитель $|B'| = |B|$ уравнений (92) отличен от нуля, то всякой системе численных величин $a^*, b^*, c^*, \ldots, f^*$ отвечает одна и только одна система численных величин $a, b, c, \ldots, f$; обратное — очевидно. Отсюда, уравнения (92) можно рассматривать, как преобразование k-мерного евклидова пространства самого в себя, причем его точки

$$P(a, b, c, \ldots, f) \quad \text{и} \quad P^*(a^*, b^*, c^*, \ldots, f^*)$$

явятся соответственными.

В этих условиях равенство (94) показывает, что новый перемещающий множитель M^* получится, если мы в старом перемещающем множителе M сделаем преобразование параметров матрицею $(B')^{-1}$ и затем помножим результат на постоянную $|B|$, отличную от нуля.

Это можно выразить короче, сказав, что *перемещающий множитель преобразованной матрицы есть преобразование первоначального перемещающего множителя, пренебрегая постоянным фактором, отличным от нуля.*

Это обстоятельство указывает, что для изучения свойств перемещающего множителя первоначальной матрицы A следует взять такое ее преобразование $B^{-1}AB$, при котором перемещающий множитель будет иметь особенно простой вид.

§ 2. Одним из таких преобразований данной матрицы A является изображение ее в приведенной форме

$$\left\| \begin{array}{ccc} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_m \end{array} \right\| \tag{95}$$

где A_i изображает матрицу e_i-го порядка

$$A_i = \left\| \begin{array}{ccccc} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 1 & \ldots 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i & \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \lambda_i \end{array} \right\| \tag{96}$$

и где

$$e_1 + e_2 + e_3 + \cdots + e_m = k.$$

Следовательно, в приведенном виде матрица A имеет все элементы, находящиеся вне малых квадратных матриц A_i, равными нулю; в самих же матрицах A_i все элементы, находящиеся вне главной диагонали и вне прилегающей к ней сверху параллели, также равны нулю. На самой же главной диагонали матрицы A_i все элементы равны количеству λ_i, и на указанной параллели все элементы равны 1.

Известно, что количества

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m \tag{97}$$

суть корни векового уравнения

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, a_{12}\ a_{13} \ldots a_{1k} \\ a_{21}, a_{22}-\lambda, a_{23} \ldots a_{2k} \\ a_{31}\ a_{32}, a_{33}-\lambda, \ldots a_{3k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}\ a_{k2}\ a_{k3} \ldots, a_{kk}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

причем *все* корни этого уравнения будут получены, если каждое из количеств λ_i строчки (97) будет повторено e_i раз ($i = 1, 2, 3, \ldots, m$). Следует, наконец, заметить, что среди количеств (97) могут оказаться и равные между собою, и что, следовательно, вовсе не предполагается, что в строчке (97) выписаны непременно попарно различные количества.

Известно из теории матриц, что количества $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ и целые положительные числа $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_m$ тесно связаны с элементарными делителями матрицы A: в рассматриваемом случае таковыми являются выражения

$$(\lambda-\lambda_1)^{e_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{e_2},\ (\lambda-\lambda_3)^{e_3}, \ldots, (\lambda-\lambda_m)^{e_m} \tag{98}$$

Из теории матриц же известно, что в случае, когда все корни векового уравнения (1) суть вещественны, то матрица B, преобразующая данную матрицу A в ее приведенную форму (95), имеет все свои элементы b_{ij} *вещественными* числами.

§ 3. Напомнив все это, доведем теперь до конца вычисление перемещающего множителя M^* для приведенной матрицы A^* (95).

С этой целью мы, прежде всего, разбиваем совокупность его параметров $a^*, b^*, c^*, \ldots, f^*$ на m последовательных групп $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_m$, численностью соответственно в $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_m$ параметров. Является к тому же целесообразным обозначить параметры каждой группы одною буквою со значками. Для этого мы обозначим параметры группы Γ_i чрез

$$h', h'', h''', \ldots, h^{(e_i)}.$$

Соответственно этому перемещающий множитель M^* изобразится в виде определителя

$$M^* = \left| M_1^* \;\vdots\; M_2^* \;\vdots\; M_3^* \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; M_m^* \right| \tag{101}$$

разбитого на m частных матриц $M_1^*, M_2^*, M_3^*, \ldots, M_m^*$, причем в первой строке матрицы M_i^* будут стоять параметры $h', h'', h''', \ldots, h^{(e_i)}$.

Теперь важно определить закон составления дальнейших строк матрицы M_i^*. С этою целью мы прежде всего напишем s-ую строку этой матрицы в виде

$$h'_{s-1}, h''_{s-1}, h'''_{s-1}, \ldots, h^{(e_i)}_{s-1}.$$

Вспомнив, что всякая строчка определителя M^* выводится из предыдущей применением к этой последней подстановки $(A^*)'$, мы заключаем, что имеем соотношения

$$\left.\begin{aligned} h'_s &= \lambda_i h'_{s-1} \\ h''_s &= \lambda_i h''_{s-1} + h'_{s-1} \\ h'''_s &= \lambda_i h'''_{s-1} + h''_{s-1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ h^{(e_i)}_s &= \lambda_i h^{(e_i)}_{s-1} + h^{(e_i-1)}_{s-1} \end{aligned}\right\} \tag{116}$$

Закон этих соотношений ясен: имея написанными друг под другом две последовательные строки матрицы M_i^*

$$\left.\begin{array}{l} h'_{s-1}\ h''_{s-1}\ h'''_{s-1}\ \ldots\ h^{(e_i)}_{s-1} \\ h'_{s}\ \ h''_{s}\ \ h'''_{s}\ \ \ldots\ h^{(e_i)}_{s} \end{array}\right\} \tag{117}$$

мы получим элемент нижней, умножая написанный над ним элемент верхней на λ_i и прибавив соседний слева элемент этой строчки когда он имеется налицо.

Определив таким образом закон составления элементов матрицы M_i^*,

$$M_i^* = \left\| \begin{array}{l} h'\ \ h''\ \ h'''\ \ \ldots\ h^{(e_i)} \\ h'_1\ \ h''_1\ \ h'''_1\ \ \ldots\ h^{(e_i)}_1 \\ h'_2\ \ h''_2\ \ h'''_2\ \ \ldots\ h^{(e_i)}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h'_{s-1}\ h''_{s-1}\ h'''_{s-1}\ \ldots\ h^{(e_i)}_{s-1} \\ h'_s\ \ h''_s\ \ h'''_s\ \ \ldots\ h^{(e_i)}_s \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h'_{k-1}\ h''_{k-1}\ h'''_{k-1}\ \ldots\ h^{(e_i)}_{k-1} \end{array} \right\| \tag{118}$$

мы должны перейти к ее упрощению при непременном условии не изменить при этом искомой величины самого определителя M^*.

Первое упрощение, которому подлежит матрица M_i^* — это вынос за знак матрицы общего множителя h' у всех элементов первого столбца, так как, в силу формул (116), мы должны иметь

$$h'_s = \lambda_i h'_{s-1} \quad (s = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k-1).$$

После указанного выноса, матрица M_i^* напишется в виде

$$M_i^* = h'x \left\| \begin{array}{l} 1\ \ h''\ \ h'''\ \ \ldots\ h^{(e_i)} \\ \lambda_i\ \ h''_1\ \ h'''_1\ \ \ldots\ h^{(e_i)}_1 \\ \lambda_i^2\ \ h''_2\ \ h'''_2\ \ \ldots\ h^{(e_i)}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_i^{s-1}\ h''_{s-1}\ h'''_{s-1}\ \ldots\ h^{(e_i)}_{s-1} \\ \lambda_i^{s}\ \ h''_s\ \ h'''_s\ \ \ldots\ h^{(e_i)}_s \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_i^{k-1}\ h''_{k-1}\ h'''_{k-1}\ \ldots\ h^{(e_i)}_{k-1} \end{array} \right\| \tag{119}$$

Второе упрощение матрицы M_i^* состоит в том, что мы умножаем первый столбец матрицы (119) на h'' и вычитаем из второго. Так как в силу формул (116) мы имеем

$$h_s'' = \lambda_i^s h'' + s\lambda_i^{s-1} h',$$

то после указанного вычитания и вынесения общего множителя h' за знак матрицы, мы получим

$$h'^2 \times \begin{Vmatrix} 1 & 0 & h''' & \dots & h^{(ei)} \\ \lambda_i & 1 & h_1''' & \dots & h_1^{(ei)} \\ \lambda_i^2 & 2\lambda_i & h_2''' & \dots & h_2^{(ei)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_i^{s-1} & (s-1)\lambda_i^{s-2} & h_{s-1}''' & \dots & h_{s-1}^{(ei)} \\ \lambda_i^s & s\lambda_i^{s-1} & h_s''' & \dots & h_s^{(ei)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_i^{k-1} & (k-1)\lambda_i^{k-2} & h_{k-1}''' & \dots & h_{k-1}^{(ei)} \end{Vmatrix} \tag{120}$$

Третье упрощение матрицы M_i^* будет состоять в том, что мы умножаем первый столбец матрицы (120) на h''', второй ее столбец на h'', и все получившееся вычитаем из третьего столбца. Так как в силу формул (116) мы имеем

$$h_s''' = \lambda_i^s h''' + C_s^1 \lambda_i^{s-1} h'' + C_s^2 \lambda_i^{s-2} h',$$

то после указанного вычитания и вынесения общего множителя h' за знак матрицы мы получим

$$h'^3 \times \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & h^{IV} & \dots & h^{(ei)} \\ \lambda_i & 1 & 0 & h_1^{IV} & \dots & h_1^{(ei)} \\ \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & h_2^{IV} & \dots & h_2^{(ei)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_i^{s-1} & C_{s-1}^1 \lambda_i^{s-2} & C_{s-1}^1 \lambda_i^{s-3} & h_{s-1}^{IV} & \dots & h_{s-1}^{(ei)} \\ \lambda_i^s & C_s^1 \lambda_i^{s-1} & C_s^2 \lambda_i^{s-2} & h_s^{IV} & \dots & h_s^{(ei)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_i^{k-1} & C_{k-1}^1 \lambda_i^{k-2} & C_{k-1}^2 \lambda_i^{k-3} & h_{k-1}^{IV} & \dots & h_{k-1}^{(ei)} \end{Vmatrix} \tag{121}$$

Для того, чтобы убедиться в возможности продолжать и дальше эти упрощения, нам очевидно остается лишь доказать равенство

$$h_s^{(\nu)} = \lambda_i^s h^{(\nu)} + C_s^1 \lambda_i^{s-1} h^{(\nu-1)} + \\ + C_s^2 \lambda_i^{s-2} h^{(\nu-2)} + \cdots + C_s^{\nu-1} \lambda_i^{s-\nu+1} h'. \qquad (122)$$

В самом деле, при наличии этой формулы и в предположении упрощения матрицы M_i^*, доведенного включительно до $(\nu-1)$-го столбца, мы можем последовательно умножить уже преобразованные столбцы соответственно на $h^{(\nu)}$, $h^{(\nu-1)}$, $h^{(\nu-2)}$, ..., h'' и вычесть все получившееся из ν-го столбца. Тогда, в силу формулы (122), элементами ν-го столбца явятся количества (выписывая их сверху вниз): $C_s^{\nu-1} \lambda_i^{s-\nu+1} h'$; отсюда, вынося общего множителя h' за знак матрицы, мы замечаем, что упрощение рассматриваемой матрицы продвинулось еще на один столбец.

Таким образом дело сводится к проверке равенства (122). Мы видели справедливость его для $\nu = 1$, 2 и 3. Предположим его верным для всех чисел 1, 2, 3, ..., $\nu-1$. Из формул (116) следует, что

$$h_s^{(\nu)} = \lambda_i h_{s-1}^{(\nu)} + h_{s-1}^{(\nu-1)}.$$

Выражая аналогичным образом $h_{s-1}^{(\nu)}$, мы имеем

$$h_{s-1}^{(\nu)} = \lambda_i h_{s-2}^{(\nu)} + h_{s-2}^{(\nu-1)};$$

отсюда, подстановка в предыдущее равенство нам дает

$$h_s^{(\nu)} = \lambda_i^2 h_{s-2}^{(\nu)} + \lambda_i h_{s-2}^{(\nu-1)} + h_{s-1}^{(\nu-1)}.$$

Подставляя в это равенство выражение

$$h_{s-2}^{(\nu)} = \lambda_i h_{s-3}^{(\nu)} + h_{s-3}^{(\nu-1)},$$

мы имеем

$$h_s^{(\nu)} = \lambda_i^3 h_{s-3}^{(\nu)} + \lambda_i^2 h_{s-3}^{(\nu-1)} + \lambda_i h_{s-2}^{(\nu-1)} + h_{s-1}^{(\nu-1)}.$$

Продолжая все время замену коэффициента при старшей степени количества λ_i по формулам (116), мы окончательно получаем

$$h_s^{(\nu)} = \lambda_i^s h^{(\nu)} + \lambda_i^{s-1} h^{(\nu-1)} + \lambda_i^{s-2} h_1^{(\nu-1)} + \cdots + \lambda_i^2 h_{s-3}^{(\nu-1)} + \\ + \lambda_i h_{s-2}^{(\nu-1)} + h_{s-1}^{(\nu-1)},$$

что можно написать кратко в виде

$$h_s^{(\nu)} = \lambda_i^{\,s} h^{(\nu)} + \sum_{j=0}^{j=s-1} \lambda_i^{\,j} h_{s-(j+1)}^{(\nu-1)}. \tag{123}$$

Выражая теперь в этом равенстве количества $h_{s-(j+1)}^{(\nu-1)}$ по формуле (122), предположенной верной, мы находим

$$h_s^{(\nu)} = \lambda_i^{\,s} h^{(\nu)} + \sum_{j=0}^{j=s-1} \lambda_i^{\,j} \sum_{p=0}^{p=\nu-2} C_{s-(j+1)}^{p}\, \lambda_i^{\,s-(j+p+1)}\, h^{\nu-(p+1)}$$

что, после изменения порядка суммирования, дает

$$h_s^{(\nu)} = \lambda_i^{\,s} h^{(\nu)} + \sum_{p=0}^{p=\nu-2} \lambda_i^{\,s-(p+1)}\, h^{\nu-(p+1)} \sum_{j=0}^{j=s-1} C_{s-(j+1)}^{p}. \tag{124}$$

Таким образом, нужно лишь показать верность равенства

$$\sum_{j=0}^{j=s-1} C_{s-(j+1)}^{p} = C_s^{p+1},$$

которое будучи написанным в виде

$$C_0^{p} + C_1^{p} + C_2^{p} + \cdots + C_{s-1}^{p} = C_s^{p+1},$$

является известным свойством биномиальных коэффициентов. Следовательно, равенство (124) может быть написано в виде

$$h_s^{(\nu)} = \lambda_i^{\,s} h^{(\nu)} + \sum_{p=0}^{p=\nu-2} \lambda_i^{\,s-(p+1)}\, h^{\nu-(p+1)}\, C_s^{p+1},$$

что является просто формулой (122), таким образом доказанной и для числа ν (ч. т. д.).

Возвращаясь к перемещающему множителю M^* (101), мы видим, что теперь он может быть написан в виде

$$M^* = h_1^{*e_1} h_2^{*e_2} h_3^{*e_3} \ldots h_m^{*e_m} \left| \mathfrak{M}_1^* \right| \left| \mathfrak{M}_2^* \right| \left| \mathfrak{M}_3^* \right| \left| \mathfrak{M}_m^* \right| \tag{125}$$

где под h_i^* мы разумеем тот параметр, который возглавляет группу параметров Γ_i и который мы в предыдущих выкладках, ради простоты формул, обозначали просто чрез h'. Что же касается до матрицы $\mathfrak{M}_i^*$, то она имеет вид

$$\mathfrak{M}_i^* = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_i^s & C_s^1 \lambda_i^{s-1} & C_s^2 \lambda_i^{s-2} & \dots & C_s^{e_i-1} \lambda_i^{s-e_i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_i^{k-1} & C_{k-1}^1 \lambda_i^{k-2} & C_{k-1}^2 \lambda_i^{k-3} & \dots & C_{k-1}^{e_i-1} \lambda_i^{k-e_i} \end{Vmatrix} \qquad (126)$$

Здесь важно отметить, что элементы матрицы $\mathfrak{M}_i^*$ уже не содержат параметров перемещающего множителя M^*, которые, как это мы видим из формулы (125), являются вынесенными за знак определителя в виде факторов. Поэтому перемещающий множитель M^* имеет вид

$$M^* = h_1^{*e_1} h_2^{*e_2} h_3^{*e_3} \dots h_m^{*e_m} \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m) \qquad (127)$$

т. е. является произведением только тех параметров, которые возглавляют первую строчку каждой из частных матриц в степенях, равных соответственно числу столбцов этих матриц, на некоторую функцию φ корней векового уравнения, уже не зависящую от параметров.

§ 4. Мы переходим теперь к определению функции

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m).$$

В конце параграфа 5 цитированной нашей статьи (стр. 947) мы установили, что перемещающий множитель M^* становится тождественным нулю при любых значениях параметров тогда и только тогда, когда среди количеств $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m$ имеются равные. Иначе говоря, мы показали, что функция $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m)$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда одна из независимых переменных, λ_i, становится равной другой

$$\lambda_j (i \neq j).$$

Так как рассматриваемая функция есть многочлен от букв

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$$

то при указанном свойстве эта функция φ необходимо должна иметь следующий вид

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = K \cdot (\lambda_1-\lambda_2)^{p_{12}} (\lambda_1-\lambda_3)^{p_{13}} (\lambda_1-\lambda_4)^{p_{14}} \ldots (\lambda_1-\lambda_m)^{p_{1m}} \\ (\lambda_2-\lambda_3)^{p_{23}} (\lambda_2-\lambda_4)^{p_{24}} \ldots (\lambda_2-\lambda_m)^{p_{2m}} \\ (\lambda_3-\lambda_4)^{p_{34}} \ldots (\lambda_3-\lambda_m)^{p_{3m}} \qquad (128) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\lambda_{m-1}-\lambda_m)^{p_{m-1,\,m}}\end{aligned}$$

где p_{ij}, $(i<j)$, суть целые положительные числа и где K есть *численный коэффициент*.

Чтобы видеть справедливость этого утверждения, допустим, что многочлен $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ есть произведение степеней разностей переменных

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$$

на некоторую функцию $\psi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$, которая, будучи многочленом, уже не делится ни на одну из разностей $\lambda_i - \lambda_j$, $i \neq j$:

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = \prod (\lambda_i - \lambda_j)^{q_{ij}} \cdot \psi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m).$$

Так как многочлен ψ не есть ни тождественный нуль, ни какая-нибудь другая численная постоянная, то ψ фактически должен содержать хотя бы одну из букв λ, например λ_1. В этих условиях ψ есть, при некотором частном выборе численных величин для букв $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$, многочлен от независимой переменной λ_1 со старшим коэффициентом при λ_1 заведомо отличным от нуля. Но тогда многочлен $\psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_m)$ должен непременно иметь корень, и таковым может быть только одно из чисел $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$, так как перемещающий множитель M^* становится тождественным нулю лишь при равенстве хотя бы двух количеств $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_m$. Иначе говоря, многочлен $\psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m)$ должен делиться без остатка на одну из разностей $\lambda_1 - \lambda_i$, $i = 2, 3, \ldots, m$, что противоречит предположению.

Таким образом, в формуле (128) K есть *численный коэффициент*.

§ 5. Нашей ближайшей задачей является определение показателей p_{ij} и численного коэффициента K.

Чтобы определить показатели p_{ij} прибегнем к методе бесконечно-малых. *Пусть* λ_1 *равно нулю.* В этом случае формула (128) дает

$$\begin{aligned}\varphi(0, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m) = K(-1)^{p_{12}+p_{13}+\cdots+p_{1m}} \lambda_2^{p_{12}} \lambda_3^{p_{13}} \ldots \lambda_m^{p_{1m}} \\ (\lambda_2-\lambda_3)^{p_{23}} (\lambda_2-\lambda_4)^{p_{24}} \ldots (\lambda_2-\lambda_m)^{p_{2m}} \\ (\lambda_3-\lambda_4)^{p_{34}} \ldots (\lambda_3-\lambda_m)^{p_{3m}} \quad (129) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\lambda_{m-1}-\lambda_m)^{p_{m-1,m}}\end{aligned}$$

Следовательно, при $\lambda_1 = 0$, многочлен φ должен без остатка делиться на $\lambda_2^{p_{12}}$, на $\lambda_3^{p_{13}}, \ldots$, на $\lambda_m^{p_{1m}}$.

С другой стороны, при $\lambda_1 = 0$ матрица $\mathfrak{M}_1{}^*$ имеет все элементы равными нулю, за исключением тех, которые лежат на главной диагонали, и которые все равны 1. Следовательно, определитель, фигурирующий в формуле (125) и порядок которого равен k, сводится к определителю порядка $k - e_1$, получающемуся отрезыванием первой матрицы $\mathfrak{M}_1{}^*$ и *первых* e_1 *строк.*

Оценим сначала тот эффект, который производит в какой-нибудь матрице $\mathfrak{M}_i{}^*$, $i = 2, 3, \ldots, m$, отрезывание одной ее первой строки. После этой операции матрица $\mathfrak{M}_i{}^*$ получит вид

$$\left\| \begin{array}{cccccc} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \lambda_i^s & C_s^1 \lambda_i^{s-1} & \ldots & C_s^{e_i-1} \lambda_i^{s-e_i+1} & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \lambda_i^{k-1} & C_{k-1}^1 \lambda_i^{k-2} & \ldots & C_{k-1}^{e_i-1} \lambda_i^{k-e_i} & \ldots & \ldots\ldots \end{array} \right\| \quad (130)$$

который будет подлежать ряду упрощений.

Первое упрощение состоит в выносе множителя λ_i за знак матрицы, что̀ дает

$$\lambda_i \times \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_i & 2\lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_i^{s-1} & C_s^1 \lambda_i^{s-1} & \dots & C_s^{e_i-1} \lambda_i^{s-e_i+1} & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_i^{k-2} & C_{k-1}^1 \lambda_i^{k-2} & \dots & C_{k-1}^{e_i-1} \lambda_i^{k-e_i} & \dots & \end{Vmatrix}.$$

Второе упрощение состоит в том, что мы вычитаем из второго столбца первый и снова выносим λ_i за знак матрицы, что̀ дает

$$\lambda_i^2 \times \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda_i & 1 & 1 & \dots \\ \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 3\lambda_i & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_i^{s-1} & C_{s-1}^1 \lambda_i^{s-2} & C_s^2 \lambda_i^{s-2} & \dots \\ \lambda_i^{k-2} & C_{k-2}^1 \lambda_i^{k-3} & C_{k-1}^2 \lambda_i^{k-3} & \dots \end{Vmatrix}.$$

Третье упрощение состоит в том, что мы вычитаем из третьего столбца второй. В силу известного свойства биномиальных коэффициентов

$$C_s^2 - C_{s-1}^1 = C_{s-2}^2,$$

после указанного вычитания и нового выноса λ_i за знак матрицы, мы будем иметь

$$\lambda_i^3 \times \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_i^{s-1} & C_{s-1}^1 \lambda_i^{s-2} & C_{s-1}^2 \lambda_i^{s-3} & \dots & C_s^3 \lambda_i^{s-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_i^{k-2} & C_{k-2}^1 \lambda_i^{k-3} & C_{k-2}^2 \lambda_i^{k-4} & \dots & C_{k-1}^3 \lambda_i^{k-4} \end{Vmatrix}.$$

Ясно, что в силу упомянутого свойства биномиальных коффициентов

$$C_{\mu}^{\nu+1} - C_{\mu-1}^{\nu} = C_{\mu-1}^{\nu+1}$$

мы нигде не встретим препятствия к дальнейшим упрощениям. Следовательно, окончательным упрощением матрицы $\mathfrak{M}_i^*$ будет матрица

$$\lambda_i^{e_i} \times \left\| \begin{array}{llll} 1 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ \lambda_i & 1 & 0 & \ldots 0 \\ \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & \ldots 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \lambda_i^{s-1} & C_{s-1}^1 \lambda_i^{s-2} & C_{s-1}^2 \lambda_i^{s-3} & \ldots C_{s-1}^{e_i-1} \lambda_i^{s-e_i} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \lambda_i^{k-2} & C_{k-2}^1 \lambda_i^{k-3} & C_{k-2}^2 \lambda_i^{k-4} & \ldots C_{k-2}^{e_i-1} \lambda_i^{k-e_i-1} \end{array} \right\| \qquad (131)$$

т. е. эффект срезания первой строки у матрицы $\mathfrak{M}_i^*$ состоит в том, что, *во-первых,* появляется множитель $\lambda_i^{e_i}$ и, *во-вторых,* у матрицы $\mathfrak{M}_i^*$ отрезывается *последняя* строка. Это значит, что в результате, отвлекаясь от множителя $\lambda_i^{e_i}$, мы получаем матрицу совершенно того же самого вида, как и первоначальная матрица $\mathfrak{M}_i^*$, но только укороченную на одну строку, так что число k заменяется числом $k-1$.

После сказанного ясно, что, срезая у матрицы $\mathfrak{M}_i^*$ e_1 *первых* строк, мы, во-первых, получаем множителя $\lambda_i^{e_1 e_i}$ и, во-вторых, у матрицы $\mathfrak{M}_i^*$ отрезается e_1 *последних* строк.

Отсюда мы заключаем, что определитель, стоящий в формуле (125), после отрезывания у него всей первой частной матрицы $\mathfrak{M}_1^*$ и первых e_1 строк, превращается в определитель совершенно такого же вида, как и первоначальный определитель (125), но только лишенный *первой* частной матрицы и *последних* e_1 строк; кроме того, появляется множителем произведение

$$\lambda_2^{e_1 e_2} \lambda_3^{e_1 e_3} \ldots \lambda_m^{e_1 e_m}.$$

Сказанное приводит нас к тождеству

$$\varphi(0, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m) = \lambda_2^{e_1 e_2} \lambda_3^{e_1 e_3} \lambda_m^{e_1 e_m} \varphi_1(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m), \qquad (132)$$

где φ_1 обозначает точно такой же определитель, какой фигурирует в формуле (125), но без первой матрицы $\mathfrak{M}_1^*$ и без последних e_1 строк. Поэтому функция φ_1 есть многочлен от букв $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$, делящийся лишь на разности $\lambda_i - \lambda_j$ $(i > 1, j > 1, i \neq j)$ и не делящийся ни на одну из букв

$$\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m.$$

Сравнивая (132) с (129) мы вынуждены заключить, что

$$p_{12} = e_1 e_2, \; p_{13} = e_1 e_3, \; p_{14} = e_1 e_4, \ldots, \; p_{1m} = e_1 e_m.$$

И так как количества $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ можно перенумеровать в каком угодно порядке и, значит, они вполне равноправны, то отсюда мы наконец заключаем, что

$$p_{ij} = e_i e_j. \tag{133}$$

Таким образом, показатели p_{ij} определены.

Перейдем теперь к определению числового коэффициента K в формуле (128).

С этой целью напишем сначала функцию $\varphi_1(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m)$ в виде

$$\begin{aligned}\varphi_1(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m) = K_1 (\lambda_2 - \lambda_3)^{e_2 e_3} (\lambda_2 - \lambda_4)^{e_2 e_4} \ldots (\lambda_2 - \lambda_m)^{e_2 e_m} \\ (\lambda_3 - \lambda_4)^{e_3 e_4} \ldots (\lambda_3 - \lambda_m)^{e_3 e_m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\lambda_{m-1} - \lambda_m)^{e_{m-1} e_m}\end{aligned} \tag{134}$$

где K_1 есть численный коэффициент. Заменив теперь в равенстве (132) функцию $\varphi_1(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m)$ чрез выражение (134), а функцию

$$\varphi(0, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m)$$

чрез выражение (129), в котором все p_{ij} заменены по формуле (133), мы будем иметь

$$K(-1)^{e_1(e_2+e_3+\cdots+e_m)} = K_1$$

или, что есть все то же самое

$$K = (-1)^{e_1(e_2+e_3+\cdots+e_m)} K_1. \tag{135}$$

Применив формулу (135) к коэффициенту K_1, мы получим

$$K_1 = (-1)^{e_2(e_3+e_4+\cdots+e_m)} K_2, \tag{136}$$

где K_2 есть численный коэффициент в выражении определителя

$$\varphi(\lambda_3, \lambda_4, \ldots, \lambda_m),$$

аналогичного определителю формулы (125), но лишенного первых двух частных матриц $\mathfrak{M}_1^*$ и $\mathfrak{M}_2^*$ и последних $e_1 + e_2$ строк.

Продолжая начатую редукцию дальше, мы получаем, очевидно, систему равенств

$$\left.\begin{aligned} K &= (-1)^{e_1(e_2+e_3+\cdots+e_m)} K_1 \\ K_1 &= (-1)^{e_2(e_3+e_4+\cdots+e_m)} K_2 \\ K_2 &= (-1)^{e_3(e_4+e_5+\cdots+e_m)} K_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K_{m-2} &= (-1)^{e_{m-1}e_m} K_{m-1} \end{aligned}\right\} \tag{137}$$

И так как определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ \lambda_m & 1 & 0 \ldots 0 \\ \lambda_m^2 & 2\lambda_m & 1 \ldots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \lambda_m^{e_m-1} & \cdots\cdots & 1 \end{vmatrix}$$

равен 1, то имеем равенство $K_{m-1} = 1$; отсюда, перемножив равенства (137), мы получим

$$K = (-1)^{e_1(e_2+\cdots+e_m)+e_2(e_3+\cdots+e_m)+e_3(e_4+\cdots+e_m)+\cdots+e_{m-1}e_m}.$$

Приняв теперь во внимание, что порядок k определителя (125) связан соотношением

$$k = e_1 + e_2 + e_3 + \cdots + e_m,$$

мы имеем окончательно

$$K=(-1)^{\frac{1}{2}(k^2-e_1^2-e_2^2-\cdots-e_m^2)}. \tag{138}$$

Таким образом, полное выражение перемещающего множителя для приведенной матрицы A^* (95) будет

$$\begin{aligned} M^*=(-1)^{\frac{1}{2}(k^2-e_1^2-\cdots-e_m^2)} & h_1^{*e_1}h_2^{*e_2}\ldots h_m^{*e_m}\times \\ \times(\lambda_1-\lambda_2)^{e_1e_2}(\lambda_1-\lambda_3)^{e_1e_3}\ldots(\lambda_1-\lambda_m)^{e_1e_m} & \\ (\lambda_2-\lambda_3)^{e_2e_3}\ldots(\lambda_2-\lambda_m)^{e_2e_m} & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ (\lambda_{m-1}-\lambda_m)^{e_{m-1}e_m} & \end{aligned} \tag{139}$$

Вспомнив, что новые параметры h_i^* выражаются чрез старые по формулам (92), мы видим, что h_i^* есть просто *линейная форма от старых параметров* $a, b, c, \ldots, f$ и что форма эта содержится в правой части одного из равенств (92). Обозначив эту линейную форму чрез L_i, мы имеем

$$h_i^*=L_i \tag{139*}$$

для $i=1, 2, 3, \ldots, m$.

В этих условиях, приняв во внимание равенство (94), мы будем иметь для окончательного выражения перемещающего множителя M первоначальной матрицы A равенство

$$\begin{aligned} M=\frac{1}{|B|}\cdot(-1)^{\frac{1}{2}(k^2-e_1^2-e_2^2-\cdots-e_m^2)} & \cdot L_1^{e_1}L_2^{e_2}L_3^{e_3}\ldots L_m^{e_m}\times \\ \times(\lambda_1-\lambda_2)^{e_1e_2}(\lambda_1-\lambda_3)^{e_1e_3}(\lambda_1-\lambda_4)^{e_1e_4}\ldots(\lambda_1-\lambda_m)^{e_1e_m} & \\ (\lambda_2-\lambda_3)^{e_2e_3}(\lambda_2-\lambda_4)^{e_2e_4}\ldots(\lambda_2-\lambda_m)^{e_2e_m} & \\ (\lambda_3-\lambda_4)^{e_3e_4}\ldots(\lambda_3-\lambda_m)^{e_3e_m} & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ (\lambda_{m-1}-\lambda_m)^{e_{m-1}e_m} & \end{aligned} \tag{140}$$

§ 6. Выведем некоторые следствия из полученного выражения перемещающего множителя.

Прежде всего перемещающий множитель M, являющийся однородной функцией степени k старых параметров $a, b, c, \ldots, f$, оказывается *распадающимся на произведение* k *линейных форм* L.

Ни одна из этих форм L не может ни при каких условиях оказаться тождественной нулю, потому что коэффициенты этих форм образуют строчки определителя $|B|$, заведомо отличного от нуля. По этой же последней причине, *линейные формы L суть независимые друг от друга.*

Если корни векового уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ все вещественные, то вещественными будут и все линейные формы $L_1, L_2, \ldots, L_m$. В самом деле, мы уже отметили то обстоятельство, что матрица B, преобразующая в этом случае данную матрицу A в приведенный вид, должна быть сама вещественной (см. конец § 2).

Далее, из указанного выражения (140) перемещающего множителя M мы видим явственно, что перемещающий множитель является тождественно равным нулю (т. е. при *всяких* значениях параметров $a, b, c, \ldots, f$) тогда и только тогда, когда среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ имеются равные друг другу, потому что ни одна из линейных форм L_i не может быть тождественной нулю. Это обстоятельство, с которым мы познакомились ранее в указанной нашей статье, мы интерпретировали при помощи элементарных делителей Вейерштрасса: в виду того, что выражения

$$(\lambda - \lambda_1)^{e_1},\ (\lambda - \lambda_2)^{e_2},\ (\lambda - \lambda_3)^{e_3}, \ldots,\ (\lambda - \lambda_m)^{e_m} \qquad (98)$$

суть элементарные делители Вейерштрасса для матрицы A, необходимым и достаточным условием равенства между собою двух каких-нибудь количеств $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ (и, значит, тождественного уничтожения перемещающего множителя M) является взаимная простота этих элементарных делителей.

Целые положительные $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_m$ суть *степени* указанных элементарных делителей.

Наконец, для того, чтобы перемещающий множитель M, *нетождественный нулю,* обратился в нуль при некотором *частном* выборе численных величин параметров $a, b, c, \ldots, f$ — необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере одна из линейных форм $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_m$ обратилась в нуль при этом выборе численных величин параметров.

Интерпретируем это геометрически. Рассматривая параметры

$$a, b, c, \ldots, f$$

как координаты некоторой точки $P(a, b, c, \ldots, f)$ в k-мерном евклидовом пространстве, мы видим, что всякое из m уравнений

$$L_1 = 0,\ L_2 = 0,\ L_3 = 0, \ldots,\ L_m = 0 \qquad (141)$$

определяет $(k-1)$-мерное евклидово многообразие, проходящее чрез начало координат 0. Для краткости речи, мы будем называть многообразия (141) *гиперплоскостями.**

При выборе точки $P(a, b, c, \ldots, f)$ на одной из гиперплоскостей (141), перемещающий множитель M становится нулем, и он будет равным нулю только в этом случае. Мы уже знаем, что гиперплоскости (141) вещественны, если вещественными будут корни векового уравнения.

Если корни векового уравнения все различны, тогда $m = k$ и

$$e_1 = e_2 = e_3 = \cdots = e_m = 1.$$

В этом случае гиперплоскости (141) образуют конфигурацию k гиперплоскостей, проходящих чрез начало координат. Если вековое уравнение имеет кратные корни, но элементарные делители (98) взаимно-просты, то тогда следует рассматривать в пространстве k измерений гиперплоскости (141) как *кратные*, т. е. как получившиеся от совпадения простых гиперплоскостей в кратностях, соответственно равных $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_m$.

Если корни векового уравнения вещественны, то перемещающий множитель M есть знакопостоянная форма параметров $a, b, c, \ldots, f$ тогда и только тогда, когда степени $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_m$ элементарных делителей суть *четные* числа.

§ 7. Прежде чем итти дальше, следует узнать, не может ли вычисление перемещающего множителя M

$$M = \begin{vmatrix} a & b & c & \ldots & f \\ a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & f_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1} & b_{k-1} & c_{k-1} & \ldots & f_{k-1} \end{vmatrix} \qquad (I)$$

представить каких-либо значительных упрощений. Мы сейчас увидим, что ответ на поставленный вопрос, к сожалению, приходится дать *отрицательный*. С этой целью мы докажем предложение:

* Термин не особенно удобный, но однако встречающийся в литературе, в которой, вообще, евклидовы многообразия числа измерений большего 3 называются иногда *гиперпространствами*. Неудобство этого термина то, что частица его «гипер» может ассоциироваться с представлением гиперболического пространства, о котором здесь не может быть и речи.

Теорема III. *Все элементы матрицы*

$$\left\|\begin{array}{llll} a & b & c & \dots f \\ a_1 & b_1 & c_1 & \dots f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots f_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k-1} & b_{k-1} & c_{k-1} & \dots f_{k-1} \\ a_k & b_k & c_k & \dots f_k \end{array}\right\| \qquad \text{(IV)}$$

могут быть заданы численно произвольными, лишь бы только перемещающий множитель M (I) *был отличным от нуля.*

Для доказательства предложения предположим все элементы матрицы (IV) любыми *заданными* постоянными, лишь бы определитель M(I), составленный из ее первых k строк был отличным от нуля, и постараемся подобрать матрицу A

$$A = \left\|\begin{array}{llll} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots a_{3k} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots a_{kk} \end{array}\right\| \qquad \text{(A)}$$

таким образом, чтобы она воспроизвела, согласно всем предыдущим правилам, эту данную матрицу (IV).

Для этого вспомним, что переход от каждой строки матрицы (IV) к ее следующей строке осуществляется при помощи подстановки A', и что, поэтому, мы имеем равенства

$$\left.\begin{array}{l} a_{i+1} = a_{11}\,a_i + a_{21}\,b_i + a_{31}\,c_i + \dots + a_{k1}\,f_i \\ b_{i+1} = a_{12}\,a_i + a_{22}\,b_i + a_{32}\,c_i + \dots + a_{k2}\,f_i \\ c_{i+1} = a_{13}\,a_i + a_{23}\,b_i + a_{33}\,c_i + \dots + a_{k3}\,f_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_{i+1} = a_{1k}\,a_i + a_{2k}\,b_i + a_{3k}\,c_i + \dots + a_{kk}\,f_i \end{array}\right\} \qquad (57)$$

для всех $i = 0, 1, 2, 3, \dots, k-1$.

Чтобы определить *первый* столбец матрицы A, рассмотрим первое уравнение системы (57) и положим $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, k-1$. Мы таким образом получим равенства

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= a_{11}a + a_{21}\quad b + a_{31}\quad c\quad + \cdots + a_{k1}f\\
a_2 &= a_{11}a_1 + a_{21}\quad b_1 + a_{31}\quad c_1\quad + \cdots + a_{k1}f_1\\
a_3 &= a_{11}a_2 + a_{21}\quad b_2 + a_{31}\quad c_2\quad + \cdots + a_{k1}f_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_k &= a_{11}\,a_{k-1} + a_{21}b_{k-1} + a_{31}c_{k-1} + \cdots + a_{k1}f_{k-1}
\end{aligned}\right\} \qquad (142)$$

которые можно рассматривать, как систему k линейных уравнений, служащих для определения неизвестных $a_{11}, a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{k1}$. *Так как определитель* M (I) *этой системы по предположению отличен от нуля,* то система (142) единственным образом определяет указанные неизвестные, а с ними и первый столбец искомой матрицы A.

Для того, чтобы определить *второй* столбец матрицы A, достаточно взять второе уравнение системы (142) и, полагая в нем последовательно

$$i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1,$$

написать систему равенств

$$\left.\begin{aligned}
b_1 &= a_{12}a + a_{22}\quad b + a_{32}\quad c\quad + \cdots + a_{k2}f\\
b_2 &= a_{12}a_1 + a_{22}\quad b_1 + a_{32}\quad c_1\quad + \cdots + a_{k2}f_1\\
b_3 &= a_{12}a_2 + a_{22}\quad b_2 + a_{32}\quad c_2\quad + \cdots + a_{k2}f_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
b_k &= a_{12}\,a_{k-1} + a_{22}b_{k-1} + a_{32}c_{k-1} + \cdots + a_{k2}f_{k-1}
\end{aligned}\right\} \qquad (143)$$

которая определит неизвестные $a_{12}, a_{22}, a_{32}, \ldots, a_{k2}$, образующие второй столбец матрицы A.

Ясно, что этот процесс определения элементов матрицы A способен продолжаться и далее, и что таким образом шаг за шагом определятся все элементы матрицы A. (Ч. т. д.)

§ 8. Доказанное предложение важно для понимания самой сущности методы акад. А. Н. Крылова.

В этой методе центральное место отводится линейному дифференциальному уравнению

$$D(x) = 0 \tag{V}$$

для зависимой переменной x, определяемой равенством

$$x = aq_1 + bq_2 + cq_3 + \cdots fq_k \tag{9}$$

где $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$ есть *любое* частное решение вспомогательной системы дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} q'_1 &= a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + a_{13}q_3 + \cdots + a_{1k}q_k \\ q'_2 &= a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + a_{23}q_3 + \cdots + a_{2k}q_k \\ q'_3 &= a_{31}q_1 + a_{32}q_2 + a_{33}q_3 + \cdots + a_{3k}q_k \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q'_k &= a_{k1}q_1 + a_{k2}q_2 + a_{k3}q_3 + \cdots + a_{kk}q_k \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

которую пишут, имея заданной матрицу A.

Мы видели в нашей цитированной статье, что последовательное дифференцирование равенства (9) и одновременное выражение производных чрез самые функции $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$ при помощи дифференциальных уравнений (7) приводит нас к равенствам

$$\left.\begin{aligned} x &= aq_1 + bq_2 + cq_3 + \cdots + fq_k \\ x' &= a_1q_1 + b_1q_2 + c_1q_3 + \cdots + f_1q_k \\ x'' &= a_2q_1 + b_2q_2 + c_2q_3 + \cdots + \cdots + f_2q_k \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{(k-1)} &= a_{k-1}q_1 + b_{k-1}q_2 + c_{k-1}q_3 + \cdots + f_{k-1}q_k \\ x^{(k)} &= a_kq_1 + b_kq_2 + c_kq_3 + \cdots + f_kq_k \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Сущность методы акад. А. Н. Крылова заключается в составлении того линейного дифференциального уравнения

$$D(x) = 0, \tag{V}$$

которому должна удовлетворять зависимая переменная x и которое мы получаем «исключая» переменные $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$ из *всех* уравнений (17) или из *части* уравнений (17), когда это приходится делать вследствие наличия зависимостей между собою у нескольких правых частей равенств (17). Следует здесь же отметить, что указанное исключение необходимо вести, рассматривая переменные $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$ как *буквы*, т. е. как *независимые переменные*. Действительно, вследствие того, что $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$ есть *произвольное* частное решение, т. е., иначе говоря, *общий интеграл* системы дифференциальных уравнений (7), то в силу общей теоремы Коши при начальном значении $t = t_0$ переменные $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$ могут принять *любые* численные величины $q_1^0, q_2^0, q_3^0, \ldots q_k^0$. Отсюда и вытекает, что, при исключении переменных $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$ из равенств (17), необходимо считаться с совершенным отсутствием какой-либо связи между численными значениями переменных $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$.

Дабы показать всю важность в методе акад. А. Н. Крылова составления указанного дифференциального уравнения $D(x) = 0$ (V) для зависимой переменной x, необходимо обратить внимание на свойства этой переменной, вытекающие из самого ее определения равенством (9).

Для этого прежде всего вспомним из общей теории тот факт, что, каков бы ни был корень λ векового уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ (1), система (7) дифференциальных уравнений всегда допускает частное решение

$$q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$$

нетождественное нулю и воспроизводящееся при дифференцировании до фактора λ, т. е.

$$q'_1 = \lambda q_1, \; q'_2 = \lambda q_2, \; q'_3 = \lambda q_3, \ldots, \; q'_k = \lambda q_k. \tag{8}$$

Отсюда, предполагая в формуле (9) буквы $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$ именно этим самым частным решением системы дифференциальных уравнений (7), мы заключаем, что зависимая переменная x при этом частном выборе

$$q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$$

тоже воспроизводится при дифференцировании до фактора λ, т. е.

$$x' = \lambda x. \tag{144}$$

И так как буква x должна удовлетворять составленному для нее дифференциальному уравнению $D(x) = 0$ (V) при *любом* выборе

$$q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$$

среди решений системы дифференциальных уравнений (7), то отсюда заключаем, что среди частных интегралов x дифференциального уравнения $D(x) = 0$ (V) имеются такие, которые воспроизводятся до фактора λ при дифференцировании.

Но ничто не доказывает, что рассматриваемый частный интеграл не окажется тождественным нулю

$$x \equiv 0,$$

ибо подстановка в формулу (9), определяющую x, частного решения

$$q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$$

всегда может обратить x в тождественный нуль. Здесь λ может быть каким угодно корнем векового уравнения (1).

Покажем теперь, что справедливо и обратное заключение, а именно, что если переменная x воспроизводится до некоторого постоянного фактора μ при дифференцировании, то это может произойти лишь тогда, когда этот фактор μ служит корнем векового уравнения (1).

Действительно, пусть имеем равенство

$$x' = \mu x, \tag{145}$$

где μ есть постоянная величина. Из общей теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами известно, что *общий интеграл* системы (7) может быть написан в виде

$$q_1 = \Sigma e^{\lambda t} P_1(\lambda, t), \quad q_2 = \Sigma e^{\lambda t} P_2(\lambda, t), \ldots, \quad q_k = \Sigma e^{\lambda t} P_k(\lambda, t), \tag{146}$$

где знаки суммы Σ распространяются на все *различные* корни векового уравнения (1), и где многочлены $P_i(\lambda, t)$ от буквы t суть степени не выше $p - 1$, если p есть кратность корня λ векового уравнения; заметим еще, что коэффициенты этих многочленов суть линейные формы от p *произвольных постоянных интегрирования.*

Подставив выражения (146) в формулу (9) мы видим, что переменная x примет вид

$$x = \Sigma e^{\lambda t} Q(\lambda, t), \tag{147}$$

где $Q(\lambda, t)$ есть многочлен от буквы t степени не выше $p-1$, и где знак суммы Σ распространяется на все *различные* друг от друга корни λ векового уравнения.

Подставив это выражение для x в равенство (145), мы находим

$$\Sigma e^{\lambda t}(\lambda Q + Q') = \mu \Sigma e^{\lambda t} Q,$$

что можно написать в виде

$$\Sigma e^{\lambda t}(\lambda Q + Q' - \mu Q) = 0. \tag{148}$$

Так как знак суммирования Σ в формуле (148) распространяется на все возможные *различные* попарно корни λ векового уравнения, то необходимо должны иметь

$$\lambda Q + Q' - \mu Q \equiv 0 \tag{149}$$

тождественно для всякого t. Но это равенство можно переписать в виде

$$(\mu - \lambda) Q = Q'. \tag{150}$$

Отсюда уже нетрудно заключить, что число μ должно быть одним из корней векового уравнения. Действительно, если $\mu \neq \lambda$, равенство (150) даст

$$Q = Ce^{\frac{1}{\lambda-\mu} \cdot t}, \tag{151}$$

где C есть некоторая постоянная. Но, с другой стороны, Q должно быть *многочленом* от буквы t. Это обстоятельство совместимо с формулой (151) лишь при условии $C = 0$. Следовательно, если μ не является корнем векового уравнения, мы необходимо должны иметь тождественно

$$x \equiv 0,$$

чего мы не предполагаем. (Ч. т. д.)

Установив это, возвратимся к линейному дифференциальному уравнению

$$D(x) = 0, \tag{V}$$

которому должна удовлетворять переменная x.

В раскрытом виде оно должно писаться

$$\sum_{i=0}^{i=s} g_i x^{(p_i)} = 0, \tag{152}$$

где g_i суть постоянные, отличные от нуля, и где порядки производных p_i удовлетворяют неравенствам

$$0 \leqslant p_0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_s \leqslant k.$$

Если среди частных интегралов x уравнения (152) мы ищем воспроизводящихся до фактора λ при дифференцировании

$$x' = \lambda x,$$

то *дифференциальное* уравнение (152) преобразуется в уравнение *алгебраическое*

$$\sum_{i=0}^{i=s} g_i \lambda^{p_i} x = 0,$$

которое мы напишем в виде

$$x \times \sum_{i=0}^{i=s} g_i \lambda^{p_i} = 0. \tag{153}$$

Здесь множитель при x является тем *алгебраическим* уравнением для неизвестной λ, которое мы получим, когда в *дифференциальном* уравнении $D(x) = 0$ (V)мы заменим порядки дифференцирования знаками возвышения в соответственно равную целую положительную степень. Естественно, поэтому, писать это алгебраическое уравнение в виде

$$D(\lambda) = 0. \tag{V*}$$

Если λ есть какой-либо корень этого алгебраического уравнения, то ясно, что функция

$$x = e^{\lambda t}$$

должна удовлетворить дифференциальному уравнению $D(x) = 0$ (V). И так как такая величина x воспроизводится при дифференцировании до фактора λ, то отсюда заключаем, что величина λ есть корень векового уравнения (1).

Следовательно: *все корни алгебраического уравнения* $D(\lambda)=0$ (V*) *являются корнями векового уравнения* (1).

Но *неточным* явится обратное: *вообще*, уже не всякий корень λ векового уравнения удовлетворяет алгебраическому уравнению $D(\lambda)=0$.

Это обстоятельство может произойти лишь следующим образом: раз λ есть корень векового уравнения (1), то система дифференциальных уравнений (7), конечно, обязательно допускает одно или несколько *независимых* частных решений $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$, воспроизводящихся при дифференцировании до фактора λ и следовательно, располагающихся в матрицу вида

$$\left\|\begin{array}{l}\beta_{11}e^{\lambda t},\ \beta_{12}e^{\lambda t},\ \beta_{13}e^{\lambda t},\ \ldots,\ \beta_{1k}e^{\lambda t}\\ \beta_{21}e^{\lambda t},\ \beta_{22}e^{\lambda t},\ \beta_{23}e^{\lambda t},\ \ldots,\ \beta_{2k}e^{\lambda t}\\ \beta_{31}e^{\lambda t},\ \beta_{32}e^{\lambda t},\ \beta_{33}e^{\lambda t},\ \ldots,\ \beta_{3k}e^{\lambda t}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \beta_{\nu 1}e^{\lambda t},\ \beta_{\nu 2}e^{\lambda t},\ \beta_{\nu 3}e^{\lambda t},\ \ldots,\ \beta_{\nu k}e^{\lambda t}\end{array}\right\| \tag{154}$$

в которой частные решения выписаны в строках, столбцы же отнесены к функциям $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$.

Здесь $\nu \leqslant k$ и все β_{ij} суть постоянные, матрица которых

$$\left\|\begin{array}{l}\beta_{11}\beta_{12}\beta_{13}\ldots\beta_{1k}\\ \beta_{21}\beta_{22}\beta_{23}\ldots\beta_{2k}\\ \beta_{31}\beta_{32}\beta_{33}\ldots\beta_{3k}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \beta_{\nu 1}\beta_{\nu 2}\beta_{\nu 3}\ldots\beta_{\nu k}\end{array}\right\| \tag{155}$$

имеет ранг, равный ν, потому что частные решения (154) мы предполагаем независимыми.

Однако, подстановка *каждого* из частных решений (154) в формулу (9) для получения переменной x

$$x=aq_1+bq_2+cq_3+\cdots+fq_k=(a\beta_{i1}+b\beta_{i2}+c\beta_{i3}+\cdots+f\beta_{ik})e^{\lambda t} \tag{156}$$

может дать в результате *тождественный нуль*. Это произойдет тогда, когда мы будем иметь удовлетворенной систему одновременных равенств

$$\left.\begin{aligned} a\beta_{11}+b\beta_{12}+c\beta_{13}+\cdots+f\beta_{1k}&=0\\ a\beta_{21}+b\beta_{22}+c\beta_{23}+\cdots+f\beta_{2k}&=0\\ a\beta_{31}+b\beta_{32}+c\beta_{33}+\cdots+f\beta_{3k}&=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\ a\beta_{\nu 1}+b\beta_{\nu 2}+c\beta_{\nu 3}+\cdots+f\beta_{\nu k}&=0 \end{aligned}\right\} \qquad (157)$$

Когда наступает это обстоятельство, тогда мы имеем тождественно $x\equiv 0$, и тогда из равенства (153) не следует удовлетворенность уравнения $D(\lambda)=0$ (V*), но мы можем иметь

$$\sum_{i=0}^{i=s} g_i \lambda^{p_i} \gtrless 0. \qquad (158)$$

Легко видеть, когда может наступить это обстоятельство. Каждое из равенств (157) изображает в евклидовом пространстве k измерений определенную гиперплоскость. В силу же того, что ранг матрицы (155) равен ν, равенства (157) определяют систему ν независимых гиперплоскостей, проходящих чрез начало координат 0.

Легко видеть, что гиперплоскости (157) не зависят от выбора численных величин параметров $a, b, c, \ldots, f$, и легко определить число всех их. Действительно, чтобы определить *все* частные решения вида (154) системы дифференциальных уравнений (7), соответствующие заданному корню λ векового уравнения (1), мы должны определить неизвестные β из следующей системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)\beta_1+a_{12}\beta_2+a_{13}\beta_3+\cdots+a_{1k}\beta_k&=0\\ a_{21}\beta_1+(a_{22}-\lambda)\beta_2+a_{23}\beta_3+\cdots+a_{2k}\beta_k&=0\\ a_{31}\beta_1+a_{32}\beta_2+(a_{33}-\lambda)\beta_3+\cdots+a_{3k}\beta_k&=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\ a_{k1}\beta_1+a_{k2}\beta_2+a_{k3}\beta_3+\cdots+(a_{kk}-\lambda)\beta_k&=0 \end{aligned}\right\} \qquad (159)$$

Если матрица

$$\left\| \begin{array}{l} a_{11}-\lambda, a_{12}\, a_{13} \ldots a_{1k} \\ a_{21}, a_{22}-\lambda, a_{23} \ldots a_{2k} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33}-\lambda, \ldots a_{3k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}\, a_{k2}\, a_{k3} \ldots, a_{kk}-\lambda \end{array} \right\| \tag{160}$$

имеет своим *рангом* число ρ_λ, то $k-\rho_\lambda$ будет равно числу независимых друг от друга систем чисел $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_k$, удовлетворяющих уравнениям (159) и, значит

$$\nu = k-\rho_\lambda. \tag{161}$$

Таким образом, независимые гиперплоскости (157), соответствующие данному корню λ векового уравнения, имеются в количестве $k-\rho_\lambda$; обозначим эти гиперплоскости чрез

$$\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \ldots, \Pi_{k-\rho_\lambda}. \tag{162}$$

Из предшествовавшего ясно, что если точка $P(a, b, c, \ldots, f)$ евклидова пространства E, имеющего k измерений, находится *вне пресечения* гиперплоскостей (162), то корень λ векового уравнения (1) заведомо является корнем алгебраического уравнения $D(\lambda)=0$ (V*).

Так как гиперплоскости (162) независимы друг от друга, то их пересечение является евклидовым многообразием в точности ρ_λ измерений, $0 \leqslant \rho_\lambda \leqslant k-1$; обозначим это евклидово многообразие чрез $E^{(\lambda)}$

Таким образом, всякому корню λ векового уравнения соответствует некоторое евклидово многообразие $E^{(\lambda)}$ измерения ρ_λ. Следовательно, во всем пространстве E имеется столько различных евклидовых многообразий $E^{(\lambda)}$, сколько имеется различных корней у рассматриваемого векового уравнения (1). Если точка $P(a, b, c, \ldots f)$ находится *вне всех их* (что, заметим, всегда возможно, так как максимальное число измерений у многообразия $E^{(\lambda)}$ есть $k-1$), тогда алгебраическое уравнение $D(\lambda)=0$ (V*) удовлетворено *всеми* без исключения корнями векового уравнения, хотя в кратностях, вообще, уже меньших. Последнее обстоятельство не имеет ни малейшей важности для вычисления самих корней данного векового уравнения (1), но, наоборот, выгодно для вычислений, так как степень уравнения $D(\lambda)=0$ (V*) в этом случае меньше k.

Установив это, возвратимся к системе равенств (17), служащей к составлению нужного дифференциального уравнения $D(x) = 0$ (V) для зависимой переменной x. Мы видели из теоремы III, что коэффициенты линейных форм, образующих систему (17), могут быть выбраны все без исключения *численно-произвольными*, лишь бы перемещающий множитель M был отличен от нуля.

Отсюда уже недалеко до мысли рассматривать случай обращения в нуль перемещающего множителя M как предельный и таким образом попрежнему рассматривать коэффициенты указанных линейных форм как находящиеся всецело в нашем полном распоряжении (при условии, конечно, уничтожения M). Но если мы примем такую точку зрения, тогда мы в праве думать, что линейные формы системы (17) могут образовать самые разнообразные между собою зависимости и что, следовательно, в различных частных случаях, самые разнообразные линейные зависимости могут иметь место между производными $x, x', x'', x''', \ldots, x^{(k)}$. Можно поэтому считать вероятным наличие нескольких дифференциальных уравнений $D(x) = 0$ для зависимой переменной x и, следовательно, приходилось бы считаться с возможностью нескольких алгебраических уравнений $D(\lambda) = 0$ для той или иной совокупности корней векового уравнения (1).

На самом же деле мысль о рассматривании равенства нулю перемещающего множителя как предельного случая является *вполне неточной:* в дальнейшем мы увидим, что при уничтожении перемещающего множителя M возникают чрезвычайно определительные и стойкие связи между коэффициентами линейных форм системы (17), в результате чего оказывается возможным *лишь одно* дифференциальное уравнение $D(x) = 0$ (V) для переменной x.

На это обстоятельство указывает в конце своей работы сам акад. А. Н. Крылов (см. цитированную работу, стр. 538—539):

«...если по вычислении по изложенным правилам окажется, что уравнение *

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & a & b & c & \ldots & f \\ \lambda & a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & f_1 \\ \lambda^2 & a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & f_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda^k & a_k & b_k & c_k & \ldots & f_k \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

* Мы слегка изменяем обозначения акад. А. Н. Крылова, не затронув самой сущности рассмотрений автора.

обращается в тождество

$$0 = 0,$$

т. е. все миноры, соответствующие первому столбцу, равны нулю, то это будет указывать, что исключение неизвестных

$$q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$$

может быть выполнено не из полного числа $k+1$ уравнений (17), а из меньшего их числа, тогда вычеркиваем в этой системе уравнения последовательно начиная с нижнего, и определяем то наименьшее их число, при котором все переменные $q_1, q_2, \ldots q_k$ исключаются; пишем соответствующее обыкновенное уравнение с неизвестной x, и для него характеристическое, — степень его будет ниже k, — находим его корни и, обратившись к основному определителю (6), находим кратность корней...».

В нижеследующем имеется в виду дать геометрическое доказательство только что указанного правила акад. А. Н. Крылова.* Именно, мы докажем, что в системе уравнений (17) нижние уравнения будут зависеть от верхних (являясь просто их линейными комбинациями), и что, пробегая систему (17) снизу, мы, встретившись с первым уравнением, уже независимым от верхних, можем на нем и остановиться, потому что все вышележащие уравнения будут сплошь независимыми между собою. Таким образом, в системе (17) имеется лежащий вверху слой сплошь независимых между собой уравнений, идущих без пропусков, и толщина этого слоя (т. е. число входящих в него уравнений), уменьшенная на 1, равна степени алгебраического уравнения $D(\lambda) = 0$ (V*), которое таким образом является единственным.

Такое распределение независимых и зависимых уравнений в системе (17) обусловлено чрезвычайно правильным течением численных величин коэффициентов, стоящих при количествах $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$, каковое имеет место только в случае уничтожения перемещающего множителя M, и которое, как показывает теорема III, не может иметься, если M отличен от нуля.

§ 9. Мы начинаем с рассмотрения случая, когда определитель $|A|$ отличен от нуля, $|A| \neq 0$, т. е. когда среди корней векового уравнения

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k \qquad (26)$$

нет равного нулю. Мы увидим, что случай, когда этот определитель равен нулю, тотчас же приводится к предыдущему случаю.

* На мысль об этой геометрической методе я напал после беседы с акад. С. А. Чаплыгиным относительно рассматриваемых вопросов.

Итак, предположим, что

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \dots a_{1k} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \dots a_{2k} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \dots a_{3k} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{k1} a_{k2} a_{k3} \dots a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0$$

и рассмотрим соответствующую подстановку (A)

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1k}x_k \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2k}x_k \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3k}x_k \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_k &= a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \dots + a_{kk}x_k \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Обозначим чрез $\mathcal{E}$ евклидово пространство k измерений и чрез $P(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$ и $Q(y_1, y_2, y_3, \dots, y_k)$ две его точки P и Q. Подстановка (A) заставляет отвечать всякой точке P пространства $\mathcal{E}$ определенную точку Q этого же пространства; а в силу того, что определитель $|A|$ отличен от нуля, всякой точке Q отвечает определенная точка P. Следовательно, мы имеем здесь взаимно-однозначное соответствие точек пространства $\mathcal{E}$ и, значит, можем сказать, что *пространство $\mathcal{E}$ преобразуется само в себя подстановкою* (A).

Введем следующее важное определение: евклидово многообразие $\mathcal{E}$ какого-нибудь числа k' измерений, $1 \leqslant k' < k$, проходящее чрез начало координат 0 и содержащееся в целом пространстве $\mathcal{E}$, мы называем *характеристическим*, если оно преобразуется само в себя подстановкою (A). В силу этого определения, само пространство $\mathcal{E}$ можно рассматривать тоже как характеристическое.

Крайне важно уметь отыскивать характеристические многообразия $\mathcal{E}'$, содержащиеся в данном пространстве $\mathcal{E}$. Задача разыскания их почти тождественна с задачею отыскания корней векового уравнения.

Дабы видеть это, отыщем все характеристические многообразия *одного измерения*, т. е. все характеристические прямые. Согласно определению, это будут прямые линии, проходящие чрез начало координат 0, и каждая из которых преобразуется сама в себя подстановкою (A).

Следовательно, если $P_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0 \ldots x_k^0)$ есть какая-либо точка этой прямой, то отвечающая ей преобразованная точка $Q_0(y_1^0, y_2^0, y_3^0 \ldots y_k^0)$ должна лежать на этой же прямой, что́ влечет равенства

$$y_1^0 = \lambda x_1^0, \quad y_2^0 = \lambda x_2^0, \ldots, \quad y_k^0 = \lambda x_k^0 \tag{163}$$

каковые, в силу уравнений подстановки (A), напишутся в виде

$$\begin{aligned}
\lambda x_1^0 &= a_{11} x_1^0 + a_{12} x_2^0 + a_{13} x_3^0 + \cdots + a_{1k} x_k^0 \\
\lambda x_2^0 &= a_{21} x_1^0 + a_{22} x_2^0 + a_{23} x_3^0 + \cdots + a_{2k} x_k^0 \\
\lambda x_3^0 &= a_{31} x_1^0 + a_{32} x_2^0 + a_{33} x_3^0 + \cdots + a_{3k} x_k^0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\lambda x_k^0 &= a_{k1} x_1^0 + a_{k2} x_2^0 + a_{k3} x_3^0 + \cdots + a_{kk} x_k^0
\end{aligned}$$

или, еще иначе

$$\left.\begin{aligned}
(a_{11} - \lambda) x_1^0 + a_{12} x_2^0 + a_{13} x_3^0 + \cdots + a_{1k} x_k^0 &= 0 \\
a_{21} x_1^0 + (a_{22} - \lambda) x_2^0 + a_{23} x_3^0 + \cdots + a_{2k} x_k^0 &= 0 \\
a_{31} x_1^0 + a_{32} x_2^0 + (a_{33} - \lambda) x_3^0 + \cdots + a_{3k} x_k^0 &= 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{k1} x_1^0 + a_{k2} x_2^0 + a_{k3} x_3^0 + \cdots + (a_{kk} - \lambda) x_k^0 &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{164}$$

Так как точка $P_0(x_1^0 x_2^0 x_3^0 \ldots x_k^0)$ взята отличною от начала координат 0, то должен равняться нулю определитель

$$\Delta(\lambda) - \begin{vmatrix}
a_{11} - \lambda, a_{12}, a_{13} \ldots a_{1k} \\
a_{21}, a_{22} - \lambda, a_{23} \ldots a_{2k} \\
a_{31}, a_{32}, a_{33} - \lambda, \ldots a_{3k} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{k1} a_{k2} a_{k3} \ldots, a_{kk} - \lambda
\end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

и, значит, λ должно быть корнем векового уравнения.

Следовательно, *всякой характеристической прямой отвечает определенный корень* λ *векового уравнения.* Так как подстановка (A) заставляет сдвинуться все точки характеристической прямой вдоль нее самой, и именно так, что начало координат 0 остается неподвижным, а всякая другая точка перейдет в другое место таким образом, что ее расстояние от начала координат увеличится в λ раз, то в дальнейшем, ради краткости, будем называть число λ *модулем сдвига* рассматриваемой характеристической прямой.

Обратное предложение также верно, но с тем лишь различием, что *всякому корню* λ *векового уравнения соответствует по крайней мере одна характеристическая прямая с модулем сдвига, равным* λ.

Действительно, если λ есть корень векового уравнения (1), то система уравнений (164) дает нам по крайней мере одну систему чисел $x_1^0 x_2^0 x_3^0 \ldots x_k^0$ нетождественную нулю и, следовательно, определяющую *вектор*

$$V_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ldots . x_k^0).$$

Ясно, что прямая L, на которой лежит этот вектор, есть характеристическая, и что ее модулем сдвига служит рассматриваемый корень λ.

Но, вообще, характеристических прямых, соответствующих данному корню λ векового уравнения — как своему модулю сдвига — имеется много. Чтобы видеть это, обозначим *ранг* определителя (1) чрез ρ_λ. Имеем $1 \leqslant \rho_\lambda \leqslant k-1$. Из общей теории линейных уравнений известно, что система линейных уравнений (164) имеет, в этом случае, в точности $k-\rho_\lambda$ независимых решений и, следовательно, мы имеем $k-\rho_\lambda$ независимых между собою векторов

$$V_1 V_2 V_3 \ldots V_{k-\rho_\lambda}, \tag{165}$$

каждый из которых лежит на характеристической прямой с модулем сдвига, равным рассматриваемому корню λ векового уравнения.

Обозначим теперь через E_λ *минимальное* евклидово многообразие, содержащее вектора (165). В силу того, что вектора суть независимые между собою, ясно, что число измерений многообразия E_λ есть $k-\rho_\lambda$.

Многообразие E_λ *есть характеристическое.* В самом деле, подстановка (A) не изменяет прямых

$$L_1 L_2 L_3 \ldots L_{k-\rho_\lambda}, \tag{166}$$

на которых соответственно покоятся вектора (165), потому что эти прямые суть характеристические. С другой стороны, обозначим чрез E_λ' преобразование многообразия E_λ подстановкою (A). Так как подстановка (A)

устанавливает взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное соответствие точек этих многообразий, то число измерений многообразия E_λ' есть также $k-\rho_\lambda$. И так как E_λ' должно содержать прямые (166), то отсюда следует, что E_λ' тождественно с E_λ, т. е. что E_λ есть многообразие характеристическое. (Ч. т. д.)

Всякая прямая L, проходящая чрез начало 0 и лежащая в многообразии E_λ, есть характеристическая с модулем сдвига, равным λ. Для доказательства возьмем какую-нибудь точку P прямой L отличную от начала 0 и проведем чрез нее евклидово многообразие Π_i числа измерений $k-\rho_\lambda-1$, лежащее в E_λ и параллельное всем прямым (166), за исключением прямой L_i, которая заведомо пересекается многообразием Π_i. Здесь i может обозначать любое из чисел $1, 2, 3, \ldots, k-\rho_\lambda$. Так как многообразие E_λ есть характеристическое, Π_i подстановкою (А) преобразуется в многообразие Π_i', лежащее в E_λ и параллельное многообразию Π_i. Отрезок, отсекаемый многообразием Π_i' на прямой L_i очевидно в λ раз больше отрезка, отсекаемого многообразием Π_i на этой же прямой. Рассматривая эти последние отрезки (для чего делаем сначала $i=1, 2, 3, \ldots, k-\rho_\lambda$), как декартовы косоугольные координаты точки P, лежащей в пространстве E_λ, отнесенном к осям координат (166), мы немедленно заключаем, что координаты точки P', являющейся преобразованием точки P подстановкою (А), суть в λ раз больше соответствующих координат точки P. Следовательно, точка P' лежит на прямой L и, значит, эта прямая есть характеристическая с модулем сдвига, равным λ. (Ч. т. д.)

Из доказанного предложения следует, что *или* имеется только одна характеристическая прямая, соответствующая данному корню λ векового уравнения, *или* таких прямых будет иметься бесчисленное множество, образующее некоторое евклидово многообразие E_λ. В частности, плоскость, проходящая чрез две характеристические прямые L и L' равного модуля сдвига λ, вся состоит из характеристических прямых этого же самого модуля сдвига.

Напротив, *минимальное евклидово многообразие E, содержащее характеристические прямые $L_1, L_2, \ldots, L_\mu$ попарно-различных модулей сдвига $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$, не может содержать никакой характеристической прямой, отличной от них.* Действительно, пусть λ есть модуль сдвига характеристической прямой L. Пусть P есть какая-нибудь точка прямой L (отличная от начала 0) и P' ее преобразование подстановкою (А); точка P' лежит на прямой L и имеем

$$0P' = \lambda \cdot 0P. \qquad (167)$$

С другой стороны, пусть Π_i есть евклидово многообразие измерения $\mu - 1$, проходящее чрез P и параллельное всем прямым $L_1, L_2, \ldots, L_{i-1}, L_{i+1}, \ldots, L_\mu$. Ясно, что многообразие Π_i, содержась в E, должно пересекать прямую L_i. Теперь, вследствие того, что E есть характеристическое многообразие, преобразование Π_i' многообразия Π_i должно содержаться в E, быть параллельным многообразию Π_i и пересекать прямую L в точке P'. В силу соотношения (167) ясно, что модуль сдвига λ_i должен быть равным λ, что̀ невозможно, так как здесь число i есть *любое* из чисел $1, 2, 3, \ldots, \mu$, и, значит, мы бы имели

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_i = \cdots = \lambda_\mu,$$

что̀ противоречит предположению попарного различия чисел

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_\mu$$

(ч. т. д.).

Отметим еще следующие почти очевидные свойства характеристических многообразий:

всякое характеристическое многообразие E содержит характеристическую прямую. Действительно, наличие характеристических прямых в самом пространстве $\mathcal{E}$ вытекает из существования корней векового уравнения и из того факта, что всякому корню этого уравнения соответствует по крайней мере одна характеристическая прямая. Но ничто не мешает нам взять характеристическое многообразие E за все пространство $\mathcal{E}$, и так как свойство характеристичности есть чисто *геометрическое* свойство, то отсюда и следует существование характеристической прямой в E.

*Общая часть E' характеристических многообразий $E_1, E_2, \ldots$, не сводящаяся к одному только началу координат, есть многообразие характеристическое.**

*Минимальное евклидово многообразие E'', содержащее характеристические многообразия $E_1, E_2, \ldots$, есть многообразие характеристическое.***

Первое предложение есть очевидное, второе же доказывается совершенно так же, как было сделано выше для случая, когда $E_1, E_2, \ldots$ суть характеристические прямые.

Выше мы видели, что всякому корню λ векового уравнения отвечает многообразие E_λ, число измерений которого есть $k - \rho_\lambda$, где ρ_λ есть ранг определителя (1), такое, что всякая прямая L, проходящая чрез начало 0

* Можно назвать многообразие E' *общим наибольшим делителем* многообразий $E_1, E_2, \ldots$

** Можно назвать многообразие E'' *наименьшим кратным* многообразий $E_1, E_2, \ldots$

и лежащая в E_λ есть характеристическая с модулем сдвига λ. Ясно, что *вне* этого многообразия E_λ нет более ни одной характеристической прямой с модулем сдвига λ. Легко теперь показать, что

два многообразия E_λ и $E_{\lambda'}$, соответствующие двум различным *корням λ и λ' векового уравнения, не имеют общей точки, отличной от начала координат* O. Действительно, если бы таковая нашлась, то общая часть E' многообразий E_λ и $E_{\lambda'}$ была бы характеристическим многообразием и, значит, содержала бы некоторую характеристическую прямую L, что невозможно, так как модуль сдвига для L был бы одновременно и λ, и λ', $\lambda \neq \lambda'$.

§ 10. Чтобы дать применение только что сделанным общим геометрическим рассмотрениям, мы имеем необходимость в одном вспомогательном предложении.

Возьмем какую-нибудь прямую L_1, проходящую чрез начало координат O, и рассмотрим *последовательные* ее преобразования подстановкою (A):

$$L_1, L_2, L_3, \ldots, L_i, \ldots \tag{168}$$

здесь всякая следующая прямая L_{i+1} есть преобразование предыдущей прямой L_i подстановкою (A).

Обозначим чрез $\mathcal{E}_i$ минимальное евклидово многообразие, содержащее прямые $L_1, L_2, \ldots L_i$. Ясно, что многообразие $\mathcal{E}_{i+1}$ должно содержать в себе многообразие $\mathcal{E}_i$, что́ можно символически обозначить, написав

$$\mathcal{E}_i \leqslant \mathcal{E}_{i+1},$$

где $i = 1, 2, 3, \ldots$

Таким образом, последовательности прямых (168) соответствует последовательность евклидовых многообразий

$$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \ldots, \mathcal{E}_i, \ldots \tag{169}$$

Так как все многообразия (169) содержатся в данном k-мерном пространстве $\mathcal{E}$, и так как всякое *существенное* расширение многообразия $\mathcal{E}_i$ может произойти лишь вследствие присоединения к нему одного нового изменения, то необходимо имеется такое целое положительное число μ, что мы имеем

$$\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2 < \mathcal{E}_3 < \ldots < \mathcal{E}_{\mu-1} < \mathcal{E}_\mu = \mathcal{E}_{\mu+1},$$

т. е. что все многообразия до $\mathcal{E}_\mu$ идут существенно расширяясь, и что многообразие $\mathcal{E}_\mu$ есть *первое*, тождественное со своим следующим многообразием $\mathcal{E}_{\mu+1}$. Это можно выразить еще иначе сказав, что все прямые

$$L_1, L_2, L_3, \ldots, L_\mu \tag{170}$$

суть независимые между собою, и что прямая $L_{\mu+1}$ есть первая, которая зависит от предшествующих ей прямых (170).

Мы теперь утверждаем, что *многообразие $\mathcal{E}_\mu$ есть характеристическое.*

Для доказательства рассмотрим прямые

$$L_1, L_2, L_3, \ldots, L_\varkappa, L_{\varkappa+1}, \ldots, L_{\mu-1}, L_\mu, L_{\mu+1} \tag{171}$$

Пусть $\varkappa$ есть *наибольшее* из чисел таких, что прямые

$$L_{\varkappa+1}, L_{\varkappa+2}, \ldots, L_{\mu+1}, L_\mu, L_{\mu+1} \tag{172}$$

еще независимы между собою, но прямая $L_\varkappa$ уже зависит от прямых (172), т. е. протекает в том минимальном евклидовом многообразии H_μ, которое содержит прямые (172).

В силу того, что прямые (172) все содержатся в многообразии $\mathcal{E}_\mu$, ясно, что и многообразие H_μ само содержится в многообразии $\mathcal{E}_\mu$, т. е.

$$H_\mu \leqslant \mathcal{E}_\mu \tag{173}$$

С другой стороны, преобразуем пространство $\mathcal{E}$ само в себя подстановкою $(A)^{-1}$, обратною подстановке (A). Многообразие H_μ при этом преобразуется в некоторое евклидово многообразие, которое мы обозначим чрез H_μ^{-1}. Прямые же (172) при этом перейдут в прямые

$$L_\varkappa, L_{\varkappa+1}, \ldots, L_{\mu-2}, L_{\mu-1}, L_\mu \tag{174}$$

независимые между собою, ибо они составляют часть прямых (170), независимых между собой. Ясно, что прямые (174) принадлежат и многообразию H_μ, и многообразию H_μ^{-1}.

Но число измерений многообразия H_μ есть $\mu + 1 - \varkappa$, потому что таким именно является число прямых (172), независимых между собою и охватываемых минимальным многообразием H_μ. Значит, таким же будет число измерений у преобразованного многообразия H_μ^{-1}. Но число прямых (174) тоже равно $\mu + 1 - \varkappa$. И так как эти прямые независимы между собою и содержатся в обоих многообразных H_μ и H_μ^{-1}, то оба эти

многообразия являются *минимальными* евклидовыми многообразиями по отношению к прямым (174) и, значит, должны совпадать между собою, т. е.

$$H_\mu^{-1} \equiv H_\mu.$$

Итак, многообразие H_μ есть *характеристическое*. Следовательно, H_μ преобразуется само в себя подстановкою $(A)^{-1}$. Но эта подстановка заставляет прямую L_x, содержащуюся в H_μ, перейти в прямую L_{x-1}, которая вследствие этого окажется также содержащейся в многообразии H_μ и, значит, зависимой от прямых (174). И так как это обстоятельство невозможно, то имеем

$$x = 1$$

и, таким образом последовательность (174) совпадает с последовательностью (170).

Но раз многообразие H_μ содержит все прямые (170), оно должно содержать в себе и то минимальное евклидово многообразие $\mathcal{E}_\mu$, которое охватывает эти прямые. Следовательно

$$\mathcal{E}_\mu \leqslant H_\mu. \tag{175}$$

Сопоставляя соотношения (173) и (175) мы видим, что многообразия $\mathcal{E}_\mu$ и H_μ тождественны между собою, т. е. $\mathcal{E}_\mu$ есть *многообразие характеристическое*. (Ч. т. д.).

Из доказанного следует, что все прямые (168), которых имеется бесконечное множество, принадлежат многообразию $\mathcal{E}_\mu$ и, значит, *все многообразия* (169), *начиная с многообразия* $\mathcal{E}_{\mu+1}$ *тождественны многообразию* $\mathcal{E}_\mu$.

Действительно, прямая L_1 принадлежит многообразию $\mathcal{E}_\mu$, и так как $\mathcal{E}_\mu$ инвариантно по отношению к подстановке (A), то в $\mathcal{E}_\mu$ будут содержаться и все последовательные преобразования прямой L_1 подстановкою (A). Поэтому, всякое многообразие $\mathcal{E}_i$, как содержащее прямые $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_i$ и минимальное, должно необходимо совпадать с E_μ при $i > \mu$. (Ч.т.д)

Чтобы придать доказанному форму, удобную для приложений, рассмотрим в пространстве E какой-нибудь вектор

$$V.$$

Пусть последовательные преобразования этого вектора подстановкою (A) будут вектора

$$V, V_2, V_2, V_3, \ldots, V_i, \ldots \tag{176}$$

В этих условиях мы говорим, что *существует такое целое положительное число* μ, $\mu \leqslant k$, *что все вектора*

$$V, V_1, V_2, V_3, \ldots, V_{\mu-1}, \tag{177}$$

предшествующие вектору V_μ *будут независимыми друг от друга, все же остальные вектора последовательности* (*176*) *будут зависеть от векторов* (177).

В самом деле, предположим вектора (177) независимыми друг от друга. Это значит, что прямые

$$L, L_1, L_2, L_3, \ldots, L_{\mu-1}, \tag{177*}$$

на которых лежат вектора (177), умещаются в *минимальном* евклидовом многообразии $\mathcal{E}_{\mu-1}$ измерения μ. Предположим, далее, что вектор V_μ зависит от векторов (177). Это значит, что прямая L_μ, на которой он лежит, принадлежит многообразию $\mathcal{E}_{\mu-1}$.

В силу только что доказанного, и все дальнейшие прямые

$$L_{\mu+1}, L_{\mu+2}, L_{\mu+3}, \ldots,$$

а с ними и вектора $V_{\mu+1}, V_{\mu+1}, V_{\mu+3}, \ldots$, будут содержаться в многообразии $\mathcal{E}_{\mu-1}$. Это же значит, что все вектора

$$V_\mu, V_{\mu+1}, V_{\mu+2}, V_{\mu+3}, \ldots \tag{178}$$

будут зависеть от векторов (177), т.-е. явятся их *линейными комбинациями.* (Ч. т. д)

Таким образом, *стоит только одному вектору в бесконечной последовательности векторов* (*176*) *оказаться линейной комбинацией предыдущих, как и все дальнейшие за ним вектора будут иметь это же самое свойство.*

Легко видеть, что установленное предложение содержит в себе полное доказательство *правила акад. А. Н. Крылова*, касающегося системы уравнений (17).

Действительно, рассматривая числа

$$a_i, b_i, c_i, \ldots, f_i$$

как компоненты вектора V_i в евклидовом пространстве $\mathcal{E}k$-ого измерения, мы имеем систему $k+1$ векторов, соответствующую системе уравнений (17):

$$V, V_1, V_2, V_3, \ldots, V_k. \tag{179}$$

Мы уже знаем,* что каждый вектор V_i выводится из предыдущего вектора V_{i-1} применением к нему подстановки $(A)'$. Следовательно, если среди векторов (179) какой-нибудь вектор V_μ (а с ним и правая часть соответствующего уравнения системы (17)) явится линейной комбинацией предыдущих векторов, то и все дальнейшие вектора (и отвечающие им правые части уравнений) явятся линейными комбинациями предыдущих. А это в точности и есть цитированное выше правило акад. А. Н. Крылова.

Предположим же, что вектор V_μ есть *первый* среди векторов (179), являющийся линейной комбинацией предыдущих:

$$V_\mu = g_0 V + g_1 V_1 + g_2 V_2 + \cdots + g_{\mu-1} V_{\mu-1} \tag{180}$$

где g_i суть численные множители линейной комбинации. Ясно, что *все* числа g_i не могут быть одновременно нулями, так как ни один из векторов V_i (179) не обращается в точку, раз начальный вектор V отличен от нуля.

Система уравнений (17) показывает, что, соответственно равенству (180), мы будем иметь

$$x^{(\mu)} = g_{\mu-1} x^{(\mu-1)} + g_{\mu-2} x^{(\mu-2)} + \cdots + g_2 x'' + g_1 x' + g_0 x. \tag{181}$$

Это равенство и является в методе акад. А. Н. Крылова искомым дифференциальным уравнением

$$D(x) = 0 \tag{V}$$

для зависимой переменной x.

Легко видеть, что не может иметься никакого дифференциального линейного уравнения порядка μ или ниже для зависимой переменной x.

Действительно, в силу независимости векторов

$$V, V_1, V_2, \ldots, V_{\mu-1}$$

матрица

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c & \ldots & f \\ a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & f_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\mu-1} & b_{\mu-1} & c_{\mu-1} & \ldots & f_{\mu-1} \end{matrix} \right\| \tag{182}$$

* См. стр. 925 нашей цитированной статьи.

имеет своим рангом μ. Следовательно, в этой матрице по крайней мере один определитель порядка μ отличен от нуля. С другой стороны, в силу теоремы Коши, при начальном значении $t = t_0$, начальные значения

$$q_1^0, q_2^0, q_3^0, \ldots, q_k^0$$

функций $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$ могут быть выбраны *произвольно*. Отсюда ясно, что начальные значения зависимой переменной x и ее $\mu - 1$ первых производных

$$x_0, x_0', x_0'', \ldots x_0^{(\mu-1)}$$

также могут быть заданы *произвольно* и, значит, не могут удовлетворить никакому линейному дифференциальному уравнению порядка $\leqslant \mu - 1$.

Но зависимая переменная x, удовлетворяя дифференциальному уравнению (181) порядка μ, не может иметь никакого другого дифференциального уравнения этого же самого порядка. Действительно, если бы имелось какое-нибудь другое дифференциальное уравнение для x порядка μ

$$x^{(\mu)} = g'_{\mu-1} x^{(\mu-1)} + g'_{\mu-2} x^{(\mu-2)} + \cdots + g_2' x'' + g_1' x + g'$$

то, вычитая его из уравнения (181), мы получили бы для x дифференциальное уравнение порядка меньшего μ, что, как мы видели, невозможно. (Ч. т. д.).

Выше мы видели (стр.), что из полученного линейного дифференциального уравнения

$$D(x) = 0 \qquad (V)$$

выводится алгебраическое уравнение

$$D(\lambda) = 0 \qquad (V^*)$$

заменой буквы x чрез 1 и производных $x^{(i)}$ чрез λ^i, где $i = 1, 2, 3, \ldots, \mu$. Мы видели также, что все корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_\mu$ выведенного таким образом алгебраического уравнения (V*) являются корнями данного векового уравнения (1).

Таким образом, *всякой точке $P(a, b, c, \ldots, f)$ евклидова пространства $\mathcal{E}$ k-ого измерения отвечает единственное совершенно-определенное алгебраическое уравнение $D(\lambda) = 0$ (V*), степень которого μ зависит от выбора рассматриваемой точки P, но все корни которого являются корнями векового уравнения (1).*

Мы видели, что метода акад. А. Н. Крылова составления алгебраического уравнения $D(\lambda) = 0$ (V*) не требует ничего, кроме сложений, умножений и вычитаний, — все это, притом, в относительно небольшом количестве. Это обстоятельство делает методу акад. А. Н. Крылова безусловно предпочтительной в сравнении с классическими методами Лапласа, Леверрье и Якоби, так как работы по ней требуется в $2k$ раз меньше.

Нам остается лишь посмотреть, не может ли иногда уравнение

$$D(\lambda) = 0 \qquad (V^*)$$

представить *случаи вырождения* в отношении понижения кратности или даже прямого исчезновения того или иного корня данного векового уравнения.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ОБ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

К. ПЕРСИДСКОГО

(*Представлено академиком* С. Н. Бернштейном)

1. Мы будем рассматривать ряд независимых величин

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n, \ldots, \tag{1}$$

где переменная величина x_k может принимать, с соответствующими вероятностями, непрерывный или дискретный ряд частных значений.

Определение. Пусть ε и η два произвольно заданных положительных числа. Тогда, если для некоторого ряда величин

$$c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots, c_n, \ldots \tag{1'}$$

вероятность выполнения неравенства

$$\left| \sum_1^n \frac{x_k - c_k}{n} \right| < \varepsilon \tag{2}$$

при достаточно большом значении n будет более, чем

$$1 - \eta$$

то будем говорить, что величины ряда (1) удовлетворяют «закону больших чисел».

В частности, если у величины ряда (1) существуют математические ожидания и если при

$$c_k = Mx_k,$$

где символ Mu означает математическое ожидание величины u, ряд (1) удовлетворяет «закону больших чисел», то тогда будет иметь место «закон больших чисел» в его обычной формулировке.

Мы будем иногда обозначать вероятность какого-нибудь события или неравенства A символом $[A]$; вероятность одновременного выполнения двух каких-нибудь событий A и B будем обозначать символом $[AB]$; вероятность события A, в предположении, что событие B произошло, будем обозначать символом $[A, B]$.

В дальнейшем нам придется пользоваться некоторыми известными предложениями теории вероятностей:

Лемма (I). *Если событие A есть необходимое следствие двух зависимых или независимых событий A_1 и A_2, то*

$$[A] \geqslant [A_1] + [A_2] - 1.$$

Лемма (II). *Пусть A и B два зависимых или независимых события, тогда*

$$[A] - [B] + 1 \geqslant [A, B] \geqslant [A] + [B] - 1.$$

Лемма (III). *Если*

$$\left[\left|\sum_1^n \frac{x_k - c_k}{n}\right| < \varepsilon_1\right] \geqslant 1 - \eta_1$$

и

$$\left[\left|\sum_1^n \frac{x_k - \bar{c}_k}{n}\right| < \varepsilon_2\right] \geqslant 1 - \eta_2,$$

то при $1 - \eta_1 - \eta_2 > 0$

$$\left|\sum_1^n \frac{c_k}{n} - \sum_1^n \frac{\bar{c}_k}{n}\right| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

и как следствие последней леммы:

Лемма (1). *Если величины ряда* (1) *удовлетворяют «закону больших чисел» для двух систем величин*

$$c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots, c_n, \ldots$$

и

$$\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_k, \ldots, \bar{c}_n, \ldots,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_1^n \frac{c_k}{n} - \sum_1^n \frac{\bar{c}_k}{n}\right) = 0.$$

2. В дальнейшем, если не будет сделано оговорки, мы будем полагать, что величины ряда (1) удовлетворяют «закону больших чисел», т. е. вероятность неравенства

$$\left|\sum \frac{z_k}{n}\right| < \varepsilon, \tag{3}$$

где положено

$$x_k - c_k = z_k,$$

будет более $1-\eta$ при достаточно большом значении n, т. е. коль скоро

$$n \geqslant N(\varepsilon, \eta).$$

Лемма (2). *Положим*

$$u_n = [|z_k| \geqslant 2n\varepsilon]$$

тогда

$$u_n < 2\eta \tag{4}$$

при любом $n > N(\varepsilon, \eta)$.

Доказательство. На основании леммы (I) следует, что вероятность нарушения неравенства (3) для $n > N(\varepsilon, \eta)$ будет более, чем

$$1 - \eta + u_n - 1 = u_n - \eta.$$

Но вероятность нарушения неравенства (3) при значении n, удовлетворяющем условию $n \geqslant N(\varepsilon, \eta)$, должна быть менее η.

Следовательно

$$\eta > u_n - \eta$$

или

$$u_n < 2\eta,$$

коль скоро

$$n > N(\varepsilon, \eta).$$

Лемма (3). *Обозначим*

$$\sum_1^m \frac{z_k}{m} - \frac{z_i}{m} = \sum_{1(i)}^m \frac{z_k}{m},$$

тогда

$$\left[\left|\sum_{1}^{m}{}_{(i)}\frac{z_k}{m}\right|<3\varepsilon\right]>1-3\eta$$

при любых заданных i *и* m, *удовлетворяющих условию* $N(\varepsilon,\eta)<i\leqslant m$.

Доказательство. На основании леммы (I) из неравенства (3) и (4) следует неравенство (5).

Введем обозначения:

Пусть m и i произвольно заданные числа, удовлетворяющие условию

$$m>n\geqslant N(\varepsilon,\eta)$$

и

$$n+i\leqslant m,$$

и пусть:

1) C_m означает выполнение неравенства

$$\left|\sum_{1}^{m}\frac{z_k}{m}\right|\geqslant\varepsilon.$$

Следовательно

$$[C_m]<\eta.$$

2) A_i означает выполнение неравенства

$$\left|\frac{z_{n+i}}{m}\right|\geqslant 4\varepsilon.$$

Следовательно

$$[A_i]<2\eta.$$

3) $\overline{A}_i$ означает выполнение неравенства

$$\left|\frac{z_{n+i}}{m}\right|<4\varepsilon.$$

Следовательно

$$[\overline{A}_i]>1-2\eta.$$

4) B_{im} означает выполнение неравенства

$$\left|\sum_{1}^{m}{}_{(n+i)}\frac{z_k}{m}\right|<3\varepsilon.$$

Следовательно

$$[B_{im}]>1-3\eta.$$

5) A_{em} означает выполнение неравенства

$$\left|\frac{z_{n+i}}{m}\right| \geqslant 4\varepsilon$$

хотя бы один раз при каком-нибудь значении $i = 1, 2, \ldots e$, где, понятно,

$$n + e \leqslant m.$$

Очевидно, что

$$[A_{em}] = 1 - \prod_1^e [\bar{A}_i] = 1 - \prod_1^e (1 - [A_i]).$$

Откуда

$$[A_{em}] \geqslant [A_{e(m+k)}]$$

при любом

$$k \geqslant 0.$$

Тогда при соблюдении предыдущих обозначений и условий относительно величин m, n, i, e имеют место следующие предложения:

Лемма (4). *Если при* $i = 1, 2, \ldots, e$ *и любом* $m \geqslant n + e$ *имеет место неравенство*

$$[B_{im}, \bar{A}_1 \bar{A}_2 \ldots \bar{A}_{i-1}] \geqslant \frac{1}{2},$$

то

$$[A_{em}] < 2\eta.$$

Доказательство. Очевидно достаточно доказать справедливость леммы при $m = n + e$.

Так как событие C_m произойдет всякий раз, когда одновременно произойдет какая-нибудь пара событий A_i и B_{im}, то

$$[C_m] \geqslant [A_1 B_{1m}] + [\bar{A}_1 A_2 B_{2m}] + \ldots + [\bar{A}_1 \bar{A}_2 \ldots \bar{A}_{e-1} A_e B_{em}] =$$
$$= [A_1][B_{1m}] + [\bar{A}_1 A_2][B_{2m}, \bar{A}_1] +$$
$$+ \ldots + [\bar{A}_1 \bar{A}_2 \ldots \bar{A}_{e-1} A_e][B_{em}, \bar{A}_1 \bar{A}_2 \ldots \bar{A}_{e-1}].$$

Но

$$[A_{em}] = [A_1] + [\bar{A}_1 A_2] + \ldots + [\bar{A}_1 \bar{A}_2 \ldots \bar{A}_{e-1} A_e].$$

Следовательно

$$[A_{em}] \leqslant 2[C_m] < 2\eta.$$

Лемма (5). *Если*

$$\eta \leqslant \frac{1}{10},$$

то

$$[B_{im}, \overline{A}_1 \overline{A}_2 \dots \overline{A}_{i-1}] \geqslant \frac{1}{2}$$

при любом $i = 1, 2, \dots$ *и* $m \geqslant n + i$.

Доказательство. При $i = 1$ лемма очевидна. Пусть $i = 2$, тогда на основании леммы (II) имеем:

$$[B_{2m}, \overline{A}_1] \geqslant [B_{2m}] + [\overline{A}_1] - 1 > 1 - 3\eta + 1 - 2\eta - 1 =$$
$$= 1 - 5\eta \geqslant \frac{1}{2}.$$

Итак лемма доказана при $i = 1, 2$. Допустим, что лемма верна при $i = e$, тогда она будет верна и при $i = e + 1$.

Действительно, тогда на основании леммы (4) следует:

$$1 - \prod_1^e [\overline{A}_i] = [A_{em}] < 2\eta.$$

Откуда

$$[B_{(e+1)m}, \overline{A}_1 \overline{A}_2 \dots \overline{A}_e] \geqslant [B_{(e+1)m}] + [\overline{A}_1 \overline{A}_2 \dots \overline{A}_e] - 1 =$$
$$= [B_{(e+1)m}] - [A_{em}] > 1 - 3\eta - 2\eta = 1 - 5\eta \geqslant \frac{1}{2},$$

что и доказывает лемму.

Лемма (6). *Если*

$$\eta \leqslant \frac{1}{10},$$

то

$$[A_{em}] < 2\eta$$

при любых заданных числах e *и* $m \geqslant n + e$.

Доказательство. Справедливость леммы следует из лемм (5) и (4).

3. Теорема (1). *Пусть* ε *произвольно заданное положительное число. Положим*

$$v_i = \lim_{l \to \infty} \left\{ \left[\left| \frac{e_i}{l} \right| > \varepsilon \right] \right. \qquad i = 1, 2, \dots$$

Тогда если величины ряда (1) *удовлетворяют «закону больших чисел» то необходимо чтобы:*

1^0. $v_i = 0$ *или* $v_i = 1$.

2^0. *Число величин* x_i, *для которых* $v_i = 1$, *должно быть конечное.*

Доказательство. Пункт 2^0 явствует из леммы (2).

Остается показать, что если

$$0 < v_i < 1,$$

то величины ряда (1) не удовлетворяют «закону больших чисел».

Пусть α произвольное, положительное, отличное от нуля число. Очевидно, что существует предел выражения

$$\left[\left|\frac{z_i}{m}\right| > \alpha\varepsilon\right],$$

когда $m \to \infty$, и что

$$\lim_{m\to\infty}\left[\left|\frac{z_i}{m}\right| > \alpha\varepsilon\right] = \lim_{l\to\infty}\left[\left|\frac{z_i}{l}\right| > \varepsilon\right] = v_i.$$

Возьмем какую-нибудь величину z_i, и пусть λ есть произвольно заданное положительное число, удовлетворяющее условию:

$$\lambda < v_i \quad \text{и} \quad 2\lambda < 1,$$

что всегда возможно, если $v_i > 0$.

Можно указать такое число $\overline{N} = \overline{N}(\lambda, i)$, что

$$v_i - \lambda < \left[\left|\frac{z_i}{n}\right| > 3\varepsilon\right] < v_i + \lambda$$

и

$$v_i - \lambda < \left[\left|\frac{z_i}{n}\right| > \varepsilon\right] < v_i + \lambda$$

при всех значениях $n \geqslant \overline{N}(\lambda, i)$.

Пусть в неравенстве (3) число n удовлетворяет условию

$$n \geqslant N(\varepsilon, \eta),\ n > i,\ n \geqslant \overline{N}(\lambda, i).$$

Неравенство (3) будет нарушено, коль скоро

$$\left|\frac{z_i}{n}\right| > 3\varepsilon$$

и

$$\left|\sum_{1}^{n}{}_{(i)}\frac{z_k}{n}\right| < 2\varepsilon.$$

Следовательно

$$(v_i - \lambda)\left[\left|\sum_{1}^{n}{}_{(i)}\frac{z_k}{n}\right| < 2\varepsilon\right] < \eta.$$

Откуда

$$w_i = \left[\left|\sum_{1}^{h}{}_{(i)}\frac{z_k}{n}\right| < 2\varepsilon\right] < \frac{\eta}{v_i - \lambda}.$$

Но равенство (3) будет также нарушено, коль скоро

$$\left|\frac{z_i}{n}\right| < \varepsilon$$

и

$$\left|\sum_{1}^{n}{}_{(i)}\frac{z_k}{n}\right| \geqslant 2\varepsilon.$$

Следовательно

$$\eta > (1 - v_i - \lambda)\left(1 - \frac{\eta}{v_i - \lambda}\right)$$

или

$$\eta > (v_i - \lambda)\frac{1 - v_i - \lambda}{1 - 2\lambda}.$$

Но при произвольно заданных числах η и λ этого быть не может, если только $0 < v_i < 1$, что и доказывает теорему.

Лемма (7). *Допустим, что ряд* (1) *удовлетворяет «закону больших чисел». Пусть* ν *и* ρ *произвольно заданные положительные числа. Положим*

$$p_i = \left[\left|\frac{z_i}{m}\right| \geqslant \rho\right].$$

Обозначим символом

$$\prod_{1}^{m}{}'(1 - p_i)$$

произведение выражений $(1 - p_i)$ *для тех* z_i, *у которых* $v_i < 1$.

Тогда

$$1-\prod_{1}^{m}{}'(1-p_i)<\nu$$

при достаточно больших значениях m.

Доказательство. Пусть в неравенстве (3) $\varepsilon=\frac{\rho}{4}$ и $\eta=\frac{\nu}{4}$.

Тогда, на основании леммы (6), следует:

$$1-\prod_{n+1}^{m}(1-p_i)<\frac{\nu}{2}$$

при всех значениях

$$m>n=N\left(\varepsilon,\ \eta,\ \frac{1}{10}\right),$$

где

$$N\left(\varepsilon,\ \eta,\ \frac{1}{10}\right)$$

наибольшее число из

$$N(\varepsilon,\ \eta)$$

и

$$N\left(\varepsilon,\ \frac{1}{10}\right).$$

Пусть g положительное число, удовлетворяющее условию

$$(1-g)^n\geqslant 1-\frac{\nu}{2},$$

т. е.

$$g\leqslant 1-\left(1-\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Для первых n переменных z_k, для которых $v_i\neq 1$, на основании теоремы (1) можно указать такое число $l=l(g,\ n,\ \rho)$, что

$$\left[\left|\frac{z_i}{l}\right|\geqslant\rho\right]\leqslant g \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

и если допустим, что $m\geqslant l(g,\ n,\ \rho)$, то $p_i\leqslant g$, где $i=1,\ 2,\ \ldots\ n$. Следовательно при условии, что

$$m\geqslant l(g,\ n,\ \rho)$$

и

$$m \geqslant N\left(\varepsilon, \eta, \frac{1}{10}\right)$$

будем иметь

$$1-\prod_1^{m}{}'(1-p_i)=$$

$$=1-\prod_1^{n}{}'(1-p_i)\prod_{n+1}^{m}(1-p_i)\leqslant 1-(1-g)^n\prod_{n+1}^{m}(1-p_i)\leqslant$$

$$1-\left(1-\frac{\nu}{2}\right)\prod_{n+1}^{m}(1-p_i)=1-\prod_{n+1}^{m}(1-p_i)+$$

$$+\frac{\nu}{2}\prod_{n+1}^{m}(1-p_i)<\frac{\nu}{2}+\frac{\nu}{2}=\nu,$$

что и требовалось доказать.

Лемма (8). *Пусть* ρ *и* β *произвольно заданные положительные числа. Обозначим символом*

$$\sum_1^{m}{}' p_i$$

сумму величин p_i *для тех* z_i, *у которых* $v_i<1$.

Тогда

$$\sum_1^{m}{}' p_i<\beta \tag{6}$$

при достаточно большом значении m.

Доказательство. Если в лемме (7) положить $\rho=\rho$ и $\nu=\frac{\beta}{1-\beta}$, то легко получить неравенство (6).

Теорема (2). *Обозначим через*

$$\Sigma'' z_i$$

переменную сумму тех величин z_i, *у которых* $v_i=1$. *Тогда, чтобы величины ряда* (1) *удовлетворяли «закону больших чисел», необходимо:*

$$\lim_{m\to\infty}\left[\left|\Sigma''\frac{z_i}{m}\right|>\varepsilon\right]=0, \tag{7}$$

где ε *произвольно заданное положительное число.*

Доказательство. Положим

$$p_i = \left[\left|\frac{z_i}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right].$$

Тогда, на основании леммы (8), следует, что величина

$$\beta = \sum_1^n{}' p_i$$

при достаточно большом значении n может быть сделана сколь угодно малой.

Ограничим те величины z_i, у которых $v_i \neq 1$, условием, что они, из всей совокупности своих частных значений, могут принимать лишь те частные значения, которые удовлетворяют неравенству

$$|z_i| < n\varepsilon$$

и будем, при таком ограничении, переменную сумму

$$\sum_1^n \frac{z_k}{n}$$

обозначать символом

$$\sum_1^n{}''' \frac{z_k}{n};$$

переменную сумму

$$\sum_1^n \frac{z_k}{n},$$

где относительно величин z_i не сделано никаких ограничений, будем обозначать, как и раньше, символом

$$\sum_1^n \frac{z_k}{n}.$$

Очевидно, что

$$(8)\quad \left[\left|\sum_1^n{}''' \frac{z_k}{n}\right| < \varepsilon\right] \geqslant \left[\left|\sum_1^n \frac{z_k}{n}\right| < \varepsilon\right] - \sum_1^n{}' p_i > 1 - \eta - \beta.$$

Обозначим

$$\sum_1^{n'''} \frac{z_k}{n} - \sum'' \frac{z_i}{n} = {}^* \sum_1^{n'''} \frac{z_k}{n},$$

тогда

$$\left| \sum_1^{n'''} \frac{z_k}{n} \right| \geqslant \left| \sum'' \frac{z_i}{n} \right| - \left| {}^* \sum_1^{n'''} \frac{z_k}{n} \right|,$$

но

$$\max \left| {}^* \sum_1^{n'''} \frac{z_k}{n} \right| < n\varepsilon.$$

Откуда неравенство

$$\left| \sum_1^{n'''} \frac{z_k}{n} \right| < \varepsilon$$

будет нарушено, коль скоро

$$\left| \Sigma'' \frac{z_i}{n} \right| > (n+1)\varepsilon.$$

Отсюда на основании неравенства (8) получаем:

$$\left[\left| \Sigma'' \frac{z_i}{n} \right| > (n+1)\varepsilon \right] < \eta + \beta.$$

Следовательно, коль скоро $m \geqslant n(n+1)$, то

$$\left[\left| \Sigma'' \frac{z_i}{m} \right| > \varepsilon \right] < \eta + \beta,$$

т. е.

$$u = \lim_{m \to \infty} \left[\Sigma'' \frac{z_i}{n} \right| > \varepsilon \Big] < 1.$$

Откуда, аналогично доказательству теоремы (1), легко показать необходимость равенства (7).

4. Теорема (3). *Пусть величины ряда* (1) *удовлетворяют «закону больших чисел». Откинем из величин ряда* (1) *все те* z_i, *у которых* $v_i = 1$. *Тогда оставшиеся величины необходимо должны удовлетворять «закону больших чисел».*

Очевидно, что необходимых условий теорем (1), (2) и (3) в то же время и достаточно, чтобы ряд (1) удовлетворял «закону больших чисел».

В дальнейшем я не изучаю более те величины z_i, у которых $v_i = 1$, а ограничиваюсь теми результатами, которые уже получил.

Перейдем теперь к отысканию необходимых и достаточных условий существования теоремы (3).

Следовательно мы можем считать, что величины ряда (1) удовлетворяют условию $v_i \neq 1$.

Тогда вместо леммы (8) будет иметь место

Теорема (4). *Пусть* ρ *и* β *произвольно заданные положительные числа. Положим*

$$p_i = \left[\left|\frac{z_i}{n}\right| \geqslant \rho\right].$$

Тогда, чтобы величины ряда (1) *удовлетворяли «закону больших чисел», необходимо*

$$\sum_1^n p_i < \beta, \tag{9}$$

при достаточно большом значении n.

Пусть ρ произвольно заданное положительное число. Заменим в величинах

$$z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots, z_n \tag{a}$$

те частные значения величин z_k, которые удовлетворяют неравенству

$$\left|\frac{z_k}{n}\right| \geqslant \rho \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

какими-нибудь другими значениями. Тогда получим новые величины

$$\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_k, \ldots, \bar{z}_n. \tag{b}$$

Но, аналогично неравенству (8), легко показать, что

$$\left|\left[\left|\sum_1^n \frac{z_k}{n}\right| < \varepsilon\right] - \left[\left|\sum_1^n \frac{\bar{z}_k}{n}\right| < \varepsilon\right]\right| < 2\beta.$$

Откуда на основании теоремы (4) следует

Лемма (9). *Чтобы величины ряда* (1) *удовлетворяли «закону больших чисел», необходимо, чтобы величины* (b) *также удовлетворяли «закону больших чисел», т. е.*

$$\left[\left|\sum_1^n \frac{\bar{z}_k}{n}\right| < \varepsilon\right] > 1 - \eta \tag{11}$$

при достаточно большом значении n.

Очевидно, что условия теоремы (4) и леммы (9) в то же время и достаточны.

Заменим теперь те частные значения z_k ряда (a), которые удовлетворяют неравенству (10), нулями. Тогда $|\bar{z}_k| < n\rho$.

Введем обозначения:

$$\bar{a}_k = M\bar{z}_k,\ \bar{b}_k = M(\bar{z}_k - \bar{a}_k)^2,\ \bar{d}_k = M|\bar{z}_k - \bar{a}_k|^{2+\delta},$$

где $0 < \delta \leqslant 1$,

$$B_n = \sum_1^n \bar{b}_k, \quad D_n = \sum_1^n \bar{d}_k$$

и

$$\varphi(n) = \frac{B_n}{n^2}.$$

Докажем, что имеет место следующая лемма:

Лемма (10). *Если величины ряда* (1) *удовлетворяют «закону больших чисел», то можно указать такое положительное число* L *(например* $L = 10^3$*), что*

$$\varphi(n) = \frac{B_n}{n^2} \leqslant L\rho^2 \tag{12}$$

при достаточно большом значении n.

Доказательство. Пусть L произвольно заданное положительное число; разделим последовательность значений

$$\varphi(1),\ \varphi(2), \ldots,\ \varphi(k), \ldots,\ \varphi(n)$$

на два класса (c) и (d):

(c) $\varphi(i_1),\ \varphi(i_2), \ldots,$

(d) $\varphi(s_1),\ \varphi(s_2), \ldots;$

к первому отнесем все те $\varphi(k)$, для которых выполняется неравенство

$$\varphi(k) = \frac{B_k}{k^2} \leqslant L\rho^2 \qquad (k=1,2,\ldots,n), \tag{12'}$$

ко второму все остальные.

Пусть:

$$t_1 = \frac{-n\varepsilon - \sum_1^n \bar{a}_k}{\sqrt{2B_n}}$$

и

$$t_2 = \frac{n\varepsilon - \sum_1^n \bar{a}_k}{\sqrt{2B_n}},$$

тогда

$$P_n = \left[\left|\sum_1^n \frac{\bar{z}_k}{n}\right| < \varepsilon\right] \equiv$$

$$\equiv \left[t_1\sqrt{2B_n} < \sum_1^n \bar{z}_k - \sum_1^n \bar{a}_k < t_2\sqrt{2B_n}\right] \quad (n=1, 2, \ldots, k, \ldots, n).$$

Положим

$$\left|P_n - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-x^2}\,dx\right| = \Delta_n \qquad (n=1, 2, \ldots, k, \ldots, n).$$

Для класса (d) имеем:

$$t_2 - t_1 = \frac{2n\varepsilon}{\sqrt{2B_n}} \leqslant \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{\rho\sqrt{L}}.$$

Откуда, при достаточно малом ε, выражение $t_2 - t_1$, а следовательно и значение

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-x^2}\,dx,$$

может быть сделано сколь угодно малым.

Но, по условию, ряд (1) удовлетворяет «закону больших чисел», следовательно, при любом сколь угодно малом ε, на основании леммы (9), величина P_n, при достаточно большом значении n будет сколь угодно мало отличаться от единицы.

Следовательно необходимо, чтобы: или число членов класса (d), при неограниченном возрастании числа n, было числом конечным, или величина Δ_n для класса (d), при достаточно большом значении n, была сколь угодно близкой к единице. Но в последнем случае, по известной теореме

Ляпунова (Liapounoff. Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité. Mémoires de l'Acad. des Sciences de St.-Pétersbourg. (8) 12, № 5), следует, что выражение

$$\frac{D_n^2}{B_n^{2+\delta}} \leqslant \left(\frac{\rho^2 n^2}{B_n}\right)^{\delta}$$

должно быть более некоторого постоянного числа, и так, например, грубый подсчет дает, что

$$\frac{\rho^2 n^2}{B_n} > \frac{1}{10^3},$$

коль скоро

$$\Delta_n > \frac{945}{10^3}.$$

Откуда

$$\frac{B_n}{n^2} < 10^3 \rho^2;$$

поэтому, если положить $L \geqslant 10^3$, то лемма будет доказана.

Заменим теперь частные значения z_k, удовлетворяющие неравенству (10), следующими значениями: те, которые удовлетворяют неравенству

$$|z_k| < \alpha n, \tag{13}$$

где α есть некоторое конечное число, оставим без изменения, а остальные подчиним лишь неравенству (13).

Обозначим полученные величины (b) буквами

$$z'_1, z'_2, \ldots, z'_k, \ldots, z'_n. \tag{e}$$

Положим

$$Mz'_k = a'_k, \quad M(z'_k - a'_k)^2 = b'_k, \quad \sum_1^n b'_k = B'.$$

Тогда

$$|a'_k - \bar{a}_k| \leqslant n\alpha p_k,$$

откуда

$$a'_k = \bar{a}_k + A_k n\alpha p_k,$$

где

$$|A_k| \leqslant 1.$$

$$|Mz_k'^2 - M\bar{z}_k^2| \leqslant n^2 \alpha^2 p_k,$$

откуда

$$Mz_k'^2 = M\bar{z}_k^2 + \lambda_k n^2 \alpha^2 p_k,$$

где

$$|\lambda_k| \leqslant 1.$$

Отсюда

$$b'_k = Mz_k'^2 - (Mz'_k)^2 = M\bar{z}_k^2 + \lambda_k n^2\alpha^2 p_k - \bar{a}_k^2 - 2A_k\bar{a}_k n\alpha p_k - A_k^2 n^2\alpha^2 p_k^2 = \bar{b}_k + \lambda_k n^2\alpha^2 p_k - 2A_k\bar{a}_k n\alpha p_k - A_k^2 n^2\alpha^2 p_k^2 \leqslant \bar{b}_k + (n^2\alpha^2 + 2|\bar{a}_k| n\alpha + n^2\alpha^2 p_k)p_k < \bar{b}_k + 4n^2\alpha^2 p_k,$$

так как

$$|\bar{a}_k| < n\alpha$$

при

$$\rho < \alpha.$$

Откуда, при достаточно большом значении n, на основании леммы (10), имеем:

$$\frac{B'}{n^2} < \frac{B_n + 4n^2\alpha^2 \sum_1^n p_k}{n^2} \leqslant L\rho^2 + 4\alpha^2 \sum_1^n p_k. \tag{14}$$

Из неравенства (14), на основании теоремы (4), следует:

Теорема (5). *Если последовательность величин* (e) *удовлетворяет «закону больших чисел», то необходимо*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{B'}{n^2}\right) = 0. \tag{15}$$

Но условие (15) является достаточным, чтобы последовательность (e) удовлетворяла закону больших чисел. Отсюда, на основании леммы (1), следует необходимость условия

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_1^n \frac{a'_k}{n}\right) = 0. \tag{16}$$

Очевидно, что необходимые условия (9), (15) и (16) являются и достаточными, чтобы величины ряда (1) удовлетворяли «закону больших чисел».

Откуда, на основании теорем (4) и (5), следует:

Теорема (A). *Чтобы величины ряда* (1) *удовлетворяли «закону больших чисел», необходимы и достаточны следующие условия:*

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\sum_1^n p_i = 0, \qquad 2)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sum_1^n \frac{a'_i}{n}\right) = 0$$

и

$$3)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{B'}{n^2}\right)=0.$$

Допустим, что величины ряда (1) имеют математические ожидания; тогда, как частный случай предыдущей теоремы, следует:

Теорема (B): *Чтобы величины ряда* (1) *удовлетворяли «закону больших чисел», необходимы и достаточны следующие условия:*

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\sum_1^n p_i=0,\qquad 2)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sum_1^n\frac{a'_i}{n}\right)=0$$

и

$$3)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{B'}{n^2}\right)=0,$$

где величины p_i, a'_i, B' *определяются так же, как и в теореме* (A), *если только положить* $z_k=x_k-a_k$, *где* $a_k=Mx_k$.

И, наконец, как следствие теорем (A) и (B), следует:

Теорема (C). *Допустим, что начиная с некоторого значения* $n\geqslant N$

$$\max|z_k|\leqslant n\alpha \qquad (k=1,2,\ldots n),$$

где α *некоторое положительное, конечное число.*

Положим

$$a_k=Mx_k,\quad M(x_k-a_k)^2=b_k,\ \sum_1^n b_k=B.$$

Тогда *величины*

$$c_1,\ c_2,\ldots,\ c_k,\ldots,\ c_n,\ldots$$

могут быть только *величинами*

$$a_1,\ a_2,\ldots,\ a_k,\ldots,\ a_n,\ldots$$

и для закона больших чисел *необходимо и достаточно*, чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{B}{n^2}\right)=0.$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ОБ ОДНОЙ АДДИТИВНОЙ ПРОБЛЕМЕ

Б. П. СЕГАЛА

(*Представлено академиком* И. М. Виноградовым)

В настоящей работе мы рассматриваем вопрос о представлении любого числа N в форме произведения сомножителей вида x^x, где x целое число. Этот вопрос решен в известной работе Л. Г. Шнирельмана «Об аддитивных свойствах чисел»* со следующим результатом: всякое число $N > 1$ можно представить в форме произведения двадцати шести сомножителей вида x^x, умноженного на некоторое число a, где $1 \leq a < A$ и A не зависит от N. При доказательстве этой теоремы Л. Г. Шнирельман пользовался своим методом, которым ему впервые удалось разрешить вопрос о возможности разложения любого целого числа в сумму конечного числа простых чисел. Этот метод интересен тем, что он не содержит никаких элементов анализа бесконечно-малых (не считая понятия о пределе) и вместе с тем с помощью его удалось решить проблему, недоступную пока методам современной аналитической теории чисел.

Указанную задачу мы решаем аналитически, применяя главным образом методы акад. И. М. Виноградова и при этом получаем следующий результат: всякое число $N > 1$ можно представить в форме произведения трех сомножителей вида x^x, умноженного на некоторое число a, неопределенно приближающееся к единице по мере возрастания N. Более точно полученный результат может быть формулирован так:

Пусть N любое действительное число, большее некоторого постоянного $C > 1$;

$$X = \left[\frac{\log N}{\log \log N}\right], \quad \Delta_1 = X^{-\frac{2k-15}{70k}}, \tag{1}$$

* Изв. Донск. политехн. инст., 1930, т. XIV.

где k произвольное целое число >5; $K>r\geqq 3$; σ — величина неопределенно приближающаяся к единице при возрастании N; I_N — число решений равенства

$$N=ax_1^{x_1}x_2^{x_2}\dots x_r^{x_r} \tag{2}$$

в целых $x_1, x_2, \dots, x_r$, удовлетворяющих условиям

$$K^{-1}X\leqq x_i\leqq X, \qquad i=1,\dots,r$$

и в произвольном a, удовлетворяющем условию

$$e^{-A_1}\leqq a\leqq e^{A_1}.$$

Тогда

$$I_N=\frac{2\sigma}{(r-1)!}\left(\frac{K-r}{K}\right)^{r-1}X^{r-1-\frac{3k-15}{70k}}\frac{1}{\log X}+ \tag{3}$$
$$+O\left(X^{r-1-\frac{3k-15}{70k}}\frac{\log\log X}{(\log X)^2}\right).$$

Таким образом результат аналитического решения задачи отличается от соответствующего результата, полученного Л. Г. Шнирельманом, не только снижением числа сомножителей с 26 до 3 (хотя такое уточнение уже само по себе представляет определенный интерес), но и тем, что коэффициенты a по существу отличаются друг от друга в обоих результатах: в одном случае мы имеем $1\leqq a<A$, где относительно A известно лишь, что оно не зависит от N, в другом случае a известным образом приближается к единице по мере возрастания N. Для оценки разницы между этими двумя значениями a заметим, что для $0<a\leqq 1$ задача тривиальна даже для одного множителя x^x. Наконец, аналитическое решение дает асимптотическое выражение для числа представлений I_N, чего вовсе нет в названной работе.

Все это показывает, что результат, полученный с помощью аналитической теории чисел, представляет методологический интерес, поскольку он показывает, что при решении одного и того же вопроса арифметический метод, хотя и очень плодотворный, значительно уступает в силе методу аналитическому.

§ 1. Вспомогательные теоремы

Теорема 1. Если в интервале $A\leqq x\leqq B$ реальная функция $f(x)$ удовлетворяет условиям

$$0<\Theta\leqq f'(x)\leqq\frac{1}{2},\quad f''(x)\geqq 0,$$

где Θ не зависит от x, то

$$\left| \sum_{A \leqq x \leqq B} e^{2\pi i f(x)} \right| < \frac{2}{\Theta}. *$$

Теорема 2. Пусть

$$U \geqq V \geqq l, \quad 0 < B - A \leqq U,$$

где l — постоянное $\geqq 2$; пусть кроме того в интервале $A \leqq x \leqq B$ реальная функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$V^{-1} \leqq f''(x) \leqq lV^{-1}.$$

Тогда

$$\left| \sum_{A \leqq x \leqq B} e^{2\pi i f(x)} \right| < C_1 \frac{U}{\sqrt{V}}. **$$

Здесь C_1 (так же, как в дальнейшем $C_2, \ldots, C_{35}$) — постоянная величина, или величина зависящая только от r, k и K.

Теорема 3. Для числа решений неравенства

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_r \leqq W$$

в целых положительных $t_1, t_2, \ldots, t_r$ имеет место асимптотическое выражение

$$\frac{W^r}{r!} + O(W^{r-1}).$$

Доказательство. Число решений очевидно равно

$$\sum_{m_{r-1}=1}^{W-r+1} \cdots \sum_{m_2=1}^{m_3} \sum_{m_1=1}^{m_2} m_1.$$

Но

$$\sum_{m_{\varkappa-1}=1}^{m_\varkappa} m_{\varkappa-1}^{\varkappa-1} = \frac{m_\varkappa^\varkappa}{\varkappa} + O\left(m_\varkappa^{\varkappa-1}\right),$$

откуда и получаем теорему.

* E. Landau. Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. I, Satz 352.

** И. М. Виноградов. О распределении дробных долей значений функции двух переменных. Изв. Ленингр. политехн. инст., 1927, т. XXX, стр. 41, лемма I.

Теорема 4. Пусть c_1 (так же, как в дальнейшем $c_2, \ldots, c_7$) по модулю не превосходит величины, зависящей только от r, k и K; σ приближается к единице при возрастании N; η удовлетворяет условию $0<\eta<\frac{1}{2}$ и

$$Y=\frac{\log N}{\log X+c_1}-\frac{r}{K}X=O(X). \tag{4}$$

Тогда для числа решений неравенства

$$\log N\leqq x_1\log x_1+\ldots+x_r\log x_r\leqq\log N+ \\ +\left(\log N-\frac{r}{K}X\log X\right)X^{-\eta} \tag{5}$$

в целых $x_1, \ldots, x_r$, удовлетворяющих условию

$$K^{-1}X\leqq x_i\leqq X, \qquad i=1, \ldots, r, \tag{6}$$

имеет место асимптотическое выражение

$$\frac{\sigma}{(r-1)!}Y^rX^{-\eta}+O(X^{r-2\eta}).$$

Доказательство. Так как по (6)

$$\log X-\log K\leqq\log x_i\leqq\log X, \qquad i=1, \ldots, r,$$

то вместо неравенства (5) мы можем рассматривать неравенство

$$\frac{\log N}{\log X+c_1}\leqq x_1+x_2+\ldots+x_r\leqq\frac{\log N}{\log X+c_1}+\sigma YX^{-\eta}.$$

Введя подстановку

$$x_i=K^{-1}X+t_i, \qquad i=1, \ldots, r$$

получаем вместо предыдущего неравенства следующее

$$Y\leqq t_1+t_2+\ldots+t_r\leqq Y+\sigma YX^{-\eta}.$$

Но по теореме 3 число решений последнего неравенства в целых $t_1, t_2, \ldots t_r$ равно

$$\frac{1}{r!}Y^r\left((1+\sigma X^{-\eta})^r-1\right)+c_2X^{r-1}=\frac{\sigma}{(r-1)!}Y^rX^{-\eta}+c_3X^{r-2\eta}.$$

§ 2. Функция, выражающая число представлений

Возьмем функцию

$$\varphi(\alpha)=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\sin 2\pi\Delta\xi \sin 2\pi\delta\xi}{\delta\xi^2} e^{2\pi i\alpha\xi}\, d\xi,$$

где $0<\delta<\Delta$. Не трудно убедиться (пользуясь, например, разрывным множителем Dirichlet), что

$$\varphi(\alpha)=\begin{cases} 0, & \text{когда} \quad \alpha\leqq-\Delta-\delta; \\ \frac{\alpha}{2\delta}+\frac{\Delta+\delta}{2\delta} & \text{»} \quad -\Delta-\delta\leqq\alpha\leqq-\Delta+\delta; \\ 1, & \text{»} \quad -\Delta+\delta\leqq\alpha\leqq\ \ \Delta-\delta; \\ -\frac{\alpha}{2\delta}+\frac{\Delta+\delta}{2\delta} & \text{»} \quad \Delta-\delta\leqq\alpha\leqq\ \ \Delta+\delta; \\ 0, & \text{»} \quad \Delta+\delta\leqq\alpha. \end{cases}$$

Сохраним обозначения, указанные в формулировке основной теоремы и положим кроме того

$$\delta=X^{-\frac{3k+3}{70k}}; \quad \Delta=\Delta_1+\delta;$$

$$M=e^{\log N+2\Delta n}, \quad n\text{ — целое}, \quad N\leqq M\leqq Ne^{\left(\log N-\frac{r}{K}X\log X\right)X^{-\eta}}. \tag{7}$$

Так как равенство

$$M=ax_1^{x_1}x_2^{x_2}\ldots x_r^{x_r} \tag{8}$$

удовлетворяется тогда и только тогда, когда

$$|x_1\log x_1+\cdots+x_r\log x_r-\log M|\leqq\Delta_1,$$

то

$$I_M+R=\sum_{K^{-1}X\leqq x_1\leqq X}\ldots\sum_{K^{-1}X\leqq x_r\leqq X}\varphi(x_1\log x_1+\cdots+x_r\log x_r-\log M),$$

где I_M — число представлений M в виде (8), а R соответствует дополнительным представлениям в промежутках $(-\Delta-\delta,\ -\Delta+\delta)$ и $(\Delta-\delta,$

$\Delta + \delta$). Приняв во внимание вид функции $\varphi(\alpha)$, мы получим после простого преобразования

$$I_M + R = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\sin 2\pi\Delta\xi \sin 2\pi\delta\xi}{\delta\xi^2} S^r e^{-2\pi i\xi \log M} d\xi, \tag{9}$$

где

$$S = \sum_{K^{-1}X \leqq x \leqq X} e^{2\pi i\xi x \log x}.$$

Разобьем последний интеграл в сумму шести интегралов по следующим промежуткам интегрирования:

$$0 \leqq \xi \leqq X^{-1+\frac{3}{35k}};$$

$$X^{-1+\frac{3}{35k}} \leqq \xi \leqq (4\log X)^{-1};$$

$$(4\log X)^{-1} \leqq \xi \leqq 1;$$

$$1 \leqq \xi \leqq X^{\frac{32}{35}};$$

$$X^{\frac{32}{35}} \leqq \xi \leqq X^{\frac{38}{35}};$$

$$X^{\frac{38}{35}} \leqq \xi$$

и обозначим интегралы соответственно через H_M, H_1, ... H_5. Тогда

$$|I_M - H_M| \leqq \sum_{i=1}^{5} |H_i| + |R|. \tag{10}$$

§ 3. Доказательство основной теоремы

Оценка H_1. Полагаем

$$f(x) = \xi x \log x.$$

Тогда

$$0 < \xi(\log(K^{-1}X) + 1) \leqq f'(x) \leqq \frac{\log X + 1}{4\log X} < \frac{1}{2}, \quad f''(x) > 0;$$

по теореме 1.

$$|S| < \frac{2}{\xi(\log(K^{-1}X)+1)} < \frac{C_3}{\xi}; \quad |S|^r < \frac{C_3}{\xi^r}.$$

Следовательно

$$|H_1| < C_4 \int_{X^{-1+\frac{3}{35k}}}^{(4\log X)^{-1}} \Delta \frac{d\xi}{\xi^r} < C_5 \Delta X^{\left(1-\frac{3}{35k}\right)(r-1)},$$

или

$$|H_1| < C_6 X^{r-1-\frac{3k-3}{70k}}.$$

Оценка H_2. Пусть $f(x) = \xi x \log x$,

$$U = V = \frac{X}{\xi}, \quad l = K;$$

имеем

$$V^{-1} \leqq f''(x) \leqq lV^{-1}$$

и по теореме 2

$$|S| < C_7 \sqrt{\frac{X}{\xi}}; \quad |S|^r < C_8 X^{\frac{r}{2}} \xi^{-\frac{r}{2}}.$$

Получаем

$$|H_2| < C_9 \int_{(4\log X)^{-1}}^{1} \Delta X^{\frac{r}{2}} \xi^{-\frac{r}{2}} d\xi < C_{10} \Delta X^{\frac{r}{2}} (\log X)^{\frac{r}{2}-1},$$

откуда

$$|H_2| < C_{11} X^{r-1-\frac{3k-3}{70k}}.$$

Оценка H_3. Полагая

$$U = X, \quad V = \frac{X}{\xi}, \quad l = K,$$

найдем по теореме 2

$$|S| < C_{12} \sqrt{X\xi}; \quad |S|^r < C_{13} X^{\frac{r}{2}} \xi^{\frac{r}{2}}$$

и

$$|H_3| < C_{14} \int_{1}^{X^{\frac{32}{35}}} \frac{X^{\frac{r}{2}} \xi^{\frac{r}{2}}}{\delta \xi^2} d\xi < C_{15} \delta^{-1} X^{\frac{r}{2}} X^{\frac{32}{35}\left(\frac{r}{2}-1\right)},$$

или

$$|H_3| < C_{16} X^{r-1-\frac{3k-3}{70k}}.$$

Оценка H_4. Положим

$$P=\left[\frac{X}{\sqrt{\xi}}\right].$$

Тогда сумма S распадается на

$$\left[\frac{X-K^{-1}X+1}{P}\right]+1=O\left(\frac{X}{P}\right)$$

сумм вида

$$S_T=\sum_{x=T+1}^{T+P}e^{2\pi i\xi x\log x}=\sum_{u=1}^{P}e^{2\pi i\xi\psi(u)},$$

где

$$\psi(u)=(T+u)\log(T+u),\quad T=O(X).$$

Имеем

$$|S_T|^2=S_T\cdot\overline{S}_T=\sum_{u=1}^{P}e^{2\pi i\xi\varphi(u)}\cdot\sum_{v=1}^{P}e^{-2\pi i\xi\varphi(v)}=\sum_{u,\,v}e^{2\pi i\xi(\varphi(u)-\varphi(v))}.$$

Введем подстановку $u=v+h$; тогда

$$|S_T|^2=\sum_{h=-(P-1)}^{P-1}\sum_{v}e^{2\pi i\xi(\varphi(v+h)-\varphi(v))},$$

при чем для каждого значения h величина v принимает значения не более P последовательных целых чисел. Заметив, что

$$\psi(v)=T\log T+(\log T+1)v+\frac{v^2}{2T}-\frac{v^3}{6T^2}+\cdots,$$

$$\psi(v+h)-\psi(v)=(\log T+1)h+\frac{2hv+h^2}{2T}-\frac{3hv^2+3h^2v+h^3}{6T^2}+\cdots,$$

и обозначив

$$f(v)=\xi(\psi(v+h)-\psi(v)),$$

найдем

$$|f''(v)|=\xi\left(\frac{|h|}{T^2}+c_4\frac{P|h|}{T^3}\right).$$

Если взять

$$U=V=\frac{2T^2}{|h|\xi}>P,\quad l=4,$$

то

$$V^{-1} \leqq |f''(v)| \leqq 4V^{-1}$$

и по теореме 2*

$$\left|\sum_v e^{2\pi i f(v)}\right| = \left|\sum_v e^{-2\pi i f(v)}\right|.$$

$$\left|\sum_v e^{2\pi i f(v)}\right| < C_{17}\frac{T}{\sqrt{|h|\xi}}.$$

Итак,

$$|S_T|^2 < 2C_{17}\sum_{h=1}^{P-1}\frac{T}{\sqrt{h\xi}} + P < C_{18}\sum_{h=1}^{P-1}\frac{P}{\sqrt{h}} < C_{19}P\int_1^{P-1}\frac{dh}{\sqrt{h}} < C_{20}P^{\frac{3}{2}},$$

$$|S_T| < C_{21}P^{\frac{3}{4}},$$

$$|S| < C_{22}\frac{X}{P}\cdot P^{\frac{3}{4}} = C_{22}XP^{-\frac{1}{4}}, \quad |S|^r < C_{23}X^rP^{-\frac{r}{4}}.$$

С помощью этой оценки находим

$$|H_4| < C_{23}\delta^{-1}X^{r-\frac{64}{35}}\int_{X^{\frac{32}{35}}}^{X^{\frac{38}{35}}} P^{-\frac{r}{4}}\,d\xi < C_{24}\delta^{-1}X^{r-\frac{64}{35}-\frac{r}{4}}\int_{X^{\frac{32}{35}}}^{X^{\frac{38}{35}}}\xi^{\frac{r}{8}}\,d\xi,$$

или

$$|H_4| < C_{25}X^{r-1-\frac{3k-3}{70k}}.$$

Оценка H_5. Здесь применяем тривиальную оценку

$$|S|^r \leqq X^r.$$

Получаем

$$|H_5| \leqq C_{26}\int_{X^{\frac{38}{35}}}^{\infty}\frac{X^r}{\delta\xi^2}\,d\xi,$$

откуда

$$|H_5| < C_{27}X^{r-1-\frac{3k-3}{70k}}.$$

* Мы здесь оцениваем абсолютную величину $f''(v)$, так как

Оценка R. Для оценки R очевидно достаточно заменить в правой части (8) Δ через $\Delta - 2\delta$ и оценить разность между интегралом, полученным от этой замены, и первоначальным интегралом. Сначала оценим ту часть интеграла, которую мы обозначили через H_M. Имеем

$$|H_M(\Delta) - H_M(\Delta - 2\delta)| \leqq 2\left|\int_0^{X^{-1+\frac{3}{35k}}} \frac{\cos 2\pi(\Delta-\delta)\xi \sin^2 2\pi\delta\xi}{\xi^2\delta} S^r\, d\xi\right|$$

$$\leqq C_{28} X^{r-1-\frac{8k-3}{70k}}.$$

Принимая во внимание наши оценки для всех H_i, найдем

$$|R| < C_{29} X^{r-1-\frac{3k-3}{70k}}.$$

С помощью оценок для всех H_i и для R мы получаем из (10)

$$|I_M - H_M| < C_{30} X^{r-1-\frac{3k-3}{70k}}. \tag{11}$$

Вычислим теперь погрешность, допускаемую при замене каждого H_M через H_N. Так как по (7)

$$\log M = \log N + \theta\left(\log N - \frac{r}{K} X \log X\right) X^{-\eta}, \quad 0 \leqq \theta \leqq 1$$

и в промежутке

$$0 \leqq \xi \leqq X^{-1+\frac{3}{35k}}$$

$$|2\pi i\xi\theta\left(\log N - \frac{r}{K} X \log X\right) X^{-\eta}| < C_{31} X^{\frac{3}{35k}-\eta} \log X,$$

то

$$|H_M - H_N| < C_{32} \Delta X^{r-1+\frac{6}{35k}-\eta} \log X.$$

Положив

$$\eta = \frac{3}{7k},$$

найдем

$$|H_M - H_N| < C_{32} X^{r-1-\frac{3c-3}{70k}}. \tag{12}$$

Из (10) и (12) получаем

$$|I_M - H_N| < C_{33} X^{r-1-\frac{3k-3}{70k}}. \tag{13}$$

Так как чисел M, удовлетворяющих условиям (7), будет

$$Z = \frac{\left(\log N - \frac{r}{K} X \log X\right) X^{-\eta}}{2\Delta} + c_5, \tag{14}$$

то, суммируя (13) по всем этим M, найдем

$$|\Sigma I_M - Z H_N| < C_{33} Z X^{r-1-\frac{3k-3}{70k}}. \tag{15}$$

Но ΣI_M есть число решений неравенства

$$N \leqq x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_r^{x_r} \leqq N e^{\left(\log N - \frac{r}{K} X \log X\right) X^{-\eta}}$$

в целых $x_1, x_2, \dots x_r$, удовлетворяющих условию

$$K^{-1} X \leqq x_i \leqq X, \qquad i = 1, \dots, r$$

следовательно, по теореме 4

$$\Sigma I_M = \frac{\sigma}{(r-1)!} Y^r X^{-\eta} + O(X^{r-2\eta}).$$

Подставив это значение в (15), получим

$$\left| Z H_N - \frac{\sigma}{(r-1)!} Y^r X^{-\eta} \right| < C_{34} Z X^{r-1-\frac{3k-3}{70k}},$$

$$\left| H_N - \frac{\sigma Y^r X^{-\eta}}{(r-1)! Z} \right| < C_{34} X^{r-1-\frac{3k-3}{70k}}.$$

Так как

$$\log N = X \log X + c_6 X \log\log X,$$

то по (4) и (14)

$$\frac{\sigma Y^r X^{-\eta}}{(r-1)! Z} = \frac{2\sigma}{(r-1)!} \left(\frac{K-r}{K}\right)^{r-1} \frac{X^{r-1-\frac{3k-15}{70k}}}{\log X} + c_7 \frac{X^{r-1-\frac{3k-15}{70k}} \log\log X}{(\log X)^2}$$

и из (13) и (16) находим

$$\left| I_M - \frac{2\sigma}{(r-1)!}\left(\frac{K-r}{K}\right)^{r-1}\frac{X^{r-1-\frac{3k-15}{70k}}}{\log X}\right| < C_{35}\frac{X^{r-1-\frac{3k-15}{70k}}\log\log X}{(\log X)^2};$$

полагая здесь $M = N$, мы и получаем нашу теорему.

Не трудно видеть, что в равенство (2) вместо коэффициента a, неопределенно приближающегося к единице, можно ввести коэффициент, неопределенно приближающийся к любому постоянному числу $A > 0$. Для этого достаточно вместо N рассматривать NA^{-1}.

7 февраля 1932. Ленинград.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ИЗОТЕРМИЧЕСКИЙ ТИТРОВАЛЬНЫЙ МИКРОКАЛОРИМЕТР

И. В. КРОТОВА

(*Представлено академиком* В. А. Кистяковским)

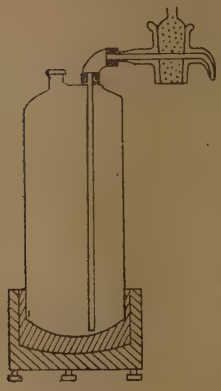
Все существующие в настоящий момент калориметры отличаются двумя важнейшими недостатками, которые у некоторых калориметров встречаются в совокупности, у некоторых — в отдельности: 1) большой размер калориметра, 2) необходимость введения различных поправок, для получения правильного результата[1] (главным образом поправки на тепловой обмен с окружающей средой). В последнее время появилась работа, посвященная описанию калориметра, построенного на совершенно новом принципе.[2] Принцип заключается в следующем. Измеряемый тепловой эффект в калориметре компенсируется охлаждением, производимым раствором азотноаммониевой соли (64.00% раствор, уд. веса при 18.2° C = 1.3033), приливаемым к воде калориметра. По количеству прилитого раствора азотноаммониевой соли и разбавлению его в калориметре — измеряется тепловой эффект. Особенность метода — это необходимость поддержания температуры окружающей среды постоянной, с точностью до 0,1°. Сам по себе калориметр, применявшийся авторами, был обычного типа, вместимостью около 2 л. В этом калориметре помещается цилиндрический стеклянный сосуд, закрепленный внизу на свинцовой подставке (фиг. 1).

Вместимость сосуда около 200 см.[3] Этот сосуд связан с маленьким газометром, источником сжатого воздуха. Отверстие отводной трубки снаружи слегка покрывается воском, чтобы исключить выползание капель. Калориметр сверху свободно покрывается алюминиевой жестью, оклеенной войлоком. В крышке прорезаны отверстия для наблюдения за приливанием раствора $NH_4 NO_3$. Из крышки выступает Бекмановский термометр, при-

[1] Handbuch der Physik, B. X, S. 322. Verlag von J. Springer, 1926.

[2] N. V. Wartenberg und B. Lerner-Steinberg. Isotherme Kalorimetrie. Ztschr. phys. Chemie, 1926, B. 122, SS. 113—120.

емник для тел, тепловой эффект которых измеряют, и мешалка. При работе с точностью до $1‰$ пользуются мешалкой из стекла с постоянным числом оборотов (Glockenrührer 2×4 см, 1500 обор. мин.) Комнатная температура должна быть постоянной с точностью до 0,1°. В этом случае температурный ход перед и после приливания раствора NH_4NO_3 одинаков и малое температурное изменение во время опыта может быть принято во внимание. Вода калориметра должна быть взвешена с точностью до 5 г (при 2 л вместимости). Так как теплота разбавления при встречающемся здесь интервале разбавлений зависит не совсем просто от концентрации, то при данном тепловом эффекте должны брать определенное количество воды (напр. 1 л на 600—1400 кал.), иначе приходят к разбавлениям, для которых тепловой эффект определяется с большими затруднениями. Прежде всего взвешивают высушенный сосуд для раствора (с точн. до 0.01 г), изобр. на фиг. 1, ставят его в калориметр, присоединяют к резервуару со сжатым воздухом, выжидают постоянства температурного хода калориметра ($< 0{,}005°$ в минуту) и начинают с тепловой реакции. Как только температура начнет подыматься — открывают кран и достигают того, что термометр колеблется самое большее на 0,01°. Особенно осторожны должны быть в конце работы. Далее опять наблюдают температурный ход калориметра. Если из цилиндрического сосуда в воду калориметра прилито a г раствора (определяется по разности между первоначальным весом цилиндрического сосуда и его весом после отливания части раствора NH_4NO_3), вес воды в калориметре W, то разбавление будет $\frac{a}{W}$. Произведенное 100 г раствора количество отрицательных калорий Q при разбавлении $\frac{a}{W}$ 100 дает табл. 1 с точностью до $1‰$. При почти линейном ходе кривой достаточно таблицу интерполировать между отдельными точками, чтобы найти соответствующее Q.



Фиг. 1.

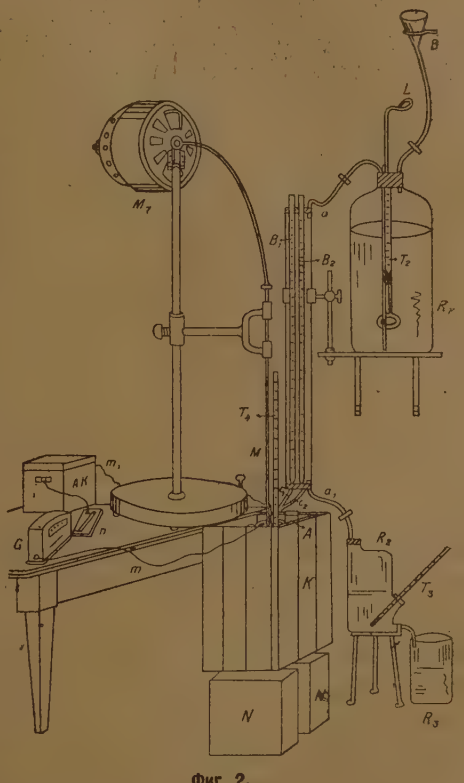
Так как употребляемый раствор может быть не точно 64% и температура опыта не 18.2° (для которой составлена табл. 1), то необходимо ввести еще поправки, учитывая эти обстоятельства. Для этой цели у авторов также приводится специальная таблица. Кроме того, необходима поправка для случайной разности температур между найденной и ожидаемой конечной температурой. Эта поправка делается принимая во внимание

Таблица 1

Разбавление $\frac{100.a}{W}$	Отриц. калор. Q на 100 г 64. 00 % раствора.	Разница
3	2085	16
3.5	2069	14.5
4	2054.5	15
4.5	2039.5	13.5
5	2026	15
5.5	2011	13.5
6	1997.5	11.5
6.5	1986	13
7	1973	

водяное число калориметра и его температурный ход, который должен быть одинаковым до реакции и после реакции. Точность измерений тепловых эффектов в таком калориметре достигала, согласно указаний авторов, $1^0/_{00}$.

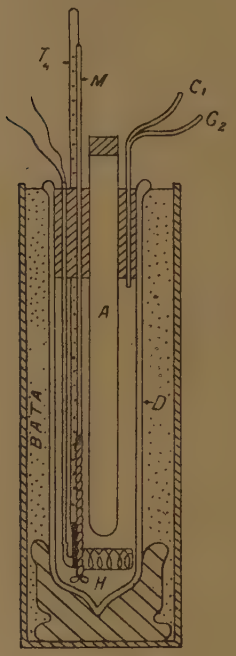
По предложению акад. В. А. Кистяковского, нами был изучен и видоизменен изотермический метод. Акад В. А. Кистяковский предложил применить объемный способ для определения количества приливаемой азотно-аммониевой соли. Задачей нашей работы являлась постройка микрокалориметра, в котором не было бы почти температурного хода, была бы возможна легкая регулировка охлаждения без боязни добавления избытка раствора NH_4NO_3 и с непременным условием объемных измерений приливаемого раствора NH_4NO_3. Мы пользовались прибором, изображенным на фиг. 2. Калориметр представляет из себя сосуд Дьюара, цилиндрической формы,



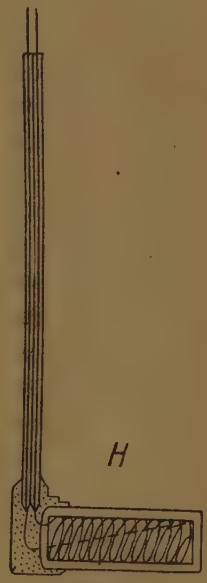
Фиг. 2.

помещенный в ящике и окруженный толстым слоем ваты (фиг. 3). Внутренний диаметр сосуда Дьюара 7.5 см, длина его 30 см. Сосуд Дьюара закры-

вался большой пробкой, длиной около 8 см, состоящей из трех слоев: верхний — пробки, средний — парафин, нижний — пропарафинированная пробка. В пробку вставлены три стеклянные трубки, предназначенные: одна для трубки A, в которой происходит реакция, тепловой эффект которой определяется, одна для пропускания через нее мешалки (M) и одна для трубок C_1 и C_2, по которым приливается из бюреток B_1 и B_2 (фиг. 2) серная кислота и раствор азотноаммониевой соли. Термометр Бекмана пропущен через



Фиг. 3.



Фиг. 4.

пробку и плотно в ней закреплен. Ответвления от нагревательного приспособления H также пропущены через пробку и к ним прикреплены клеммы. Мешалка M имеет вид, представление о котором дает фиг. 3. Термометр Бекмана был с делениями на 0.02° С. Стеклянный сосуд А имел длину, почти равную длине сосуда Дьюара и диаметр 2.5 см. Трубки C_1 и C_2 были внутреннего диаметра 1 мм. Каучук, присоединявший их к бюреткам B_1 и B_2 был толстостенный и совсем короткий. Нагревательное приспособление H (фиг. 4) было сконструировано так. На стеклянную трубку диаметром 8 мм и длиной 45 мм была надета каучуковая трубка. На эту трубку было намотано 2 м тонкой никелиновой проволоки. К концам этого нагревательного приспособления

были прикручены платиновые проволочки, впаянные в стеклянные трубки и соединенные внутри этих стеклянных трубок с медными толстыми проволоками, которые выходили наружу из калориметра. На обмотанную никелиновой проволокой трубку надевалась плотно короткая тонкостенная стеклянная пробирка. Все скреплено менделеевской замазкой, как указано на фиг. 4; сверху менделеевская замазка была покрыта еще слоем парафина. Таким образом, все проводники, относящиеся к нагревательному приспособлению, были изолированы от жидкости калориметра. Расположение приборов в собранном виде указано на фиг. 2. После сборки калориметр покрывался толстым слоем войлока. Мешалка получала движение от мотора $M_т$, скорость вращения якоря которого можно было регулировать. Через нагревательное приспособление пропускался ток от батареи аккумуляторов AK. Ток измерялся миллиамперметром Ⓐ. Температура раствора серной кислоты и раствора азотноаммониевой соли поддерживалась постоянной путем пропускания тока воды из резервуара R_1 через муфту, заключающую бюретки, в сосуд R_2 и R_3. Температура воды в резервуаре R_1 и вытекающей из муфты воды в резервуаре R_2 измерялась термометрами T_2 и T_3. Кроме того, для измерения температуры окружающего воздуха пользовались еще одним термометром (T_1), находившимся около калориметра на столе. Таким образом специальное внимание было обращено на то, чтобы наилучшим образом изолировать калориметр от теплового обмена с окружающей средой. Наш калориметр может быть назван микрокалориметром потому, что количество воды в нем равнялось 400 см³. Назначение нагревательного приспособления (или серной кислоты, добавляемой прямо в воду калориметра) сводилось к тому, чтобы сообщить калориметру желательное количество тепла. Назначение азотноаммониевой соли — вносить желательное количество отрицательных калорий в калориметр. Сравнивая с обычным титрованием кислоты щелочью, мы по аналогии можем сказать, что здесь мы имеем дело с титрованием тепла ходом. Если будет добавлен избыток серной кислоты (или сообщено излишнее количество электрической энергии) в калориметр и, следовательно, калориметр получит избыток тепла, то это избыточное тепло можно тотчас же скомпенсировать добавкой азотноаммониевой соли (таким образом нет неприятных последствий, если имело место «перетитровывание»). Объем воды в калориметре 400 см³. Результаты, полученные с нашим калориметром, приводим в табл. 2. Из рассмотрения табл. 2 можно сделать вывод, что предлагаемая конструкция калориметра гарантирует достаточно хорошую термоизоляцию и сам калориметр не имеет температурного хода, если соблюдены следующие условия: 1) температура внутри калориметра

Таблица 2

Время	Темпер. комн. T_1	Темпер. резерв. R_1 T_2	Темпер. вытек. воды T_3	Темпер. внутр. калор. T_4	Примечание
	Соотношение термометров				
—	19.30	19.40	19.25	11.526	
	Различие температур калориметра и среды около 0.3°				
0'0"	19.85	19.90	19.93	11.930	Темпер. калор. ниже темпер. среды на 0.3°C.
30 0	19.95	19.93	19.90	11.926	
60 0	19.95	19.93	19.90	11.926	
90 0	20.00	19.95	19.90	11.926	
	Большее, чем в пред. опытах, различ. темп. кал. и окр. ср.				
0 0	20.1	20.05	20.05	12.050	Темп. кал. ниже темп. ср. на 0.4°C
20 0	20.15	20.03	20.00	12.054	
40 0	20.20	20.10	20.05	12.054	
	Максимальное различие в темп. калорим. и среды				
0 0	20.25	20.16	20.10	11.790	Темп. кал. ниже темп. среды. на 0.65°C
10 0	20.20	20.13	20.10	11.800	
20 0	20.25	20.15	20.10	11.810	
	Проверка работы мешалки				
0 0	20.00	19.95	19.90	11.926	Мешал. непрер. и быстро работала
20 0	19.90	20.00	19.90	11.930	
	Темпер. калориметра выше темп. окр. среды				
0 0	18.70	—	—	10.940	Темпер. калор. выше темп. окр. ср. на 0.2°C
10 0	18.50	—	—	10.920	
15 0	18.50	—	—	10.915	
20 0	18.50	—	—	10.905	

Перед каждым отсчетом мешалка работала одну минуту

Мешалка работ. непрерывно, но медленно

не должна быть ниже температуры окружающей среды более, чем на 0.4° С.

2) Температура внутри калориметра не должна быть выше температуры окруж. среды, так как при несоблюдении этого условия наблюдается резкий ход температуры у калориметра. Согласно этим условиям у нас

Таблица 3

Время	Темп. комн. T_1	Темп. резер. R_1 T_2	Темп. выт. воды T_3	Показ. терм. калор. T_4	Бюретка с H_2SO_4	Бюретка с NH_4NO_3	Показ. милли-амперм.	Прим.
			Соотношение термометров					
—	19.3	19.4	19.25	11.526	—	—	—	
			Соотношение между током и NH_4NO_3. 1 опыт					
0/0″	19.7	19.35	19.40	11.500	—	0.00	0.1 включ.	
10 0	—	—	—	—	—	—	0.1 выкл.	
15 0	19.7	19.35	19.40	11.500	—	1.63 после прил.	—	
20 0	19.65	19.35	19.40	11.500	—	—	—	
7 0	19.70	19.40	19.40	11.500	—	1.63 нач.	0.1 включ.	
17 0	—	—	—	—	—	—	0.1 выкл.	
20 5	19.70	19.40	19.40	11.500	—	2.93 после прил.	—	
25 0	19.70	19.40	19.40	11.500	—	—	—	
27 0	19.70	19.40	19.40	11.500	—	2.93 нач.	0.1 включ.	
37 0	—	—	—	—	—	—	0.1 выкл.	
45 15	19.70	19.40	19.40	11.500	—	4.60 после прил.	—	
49 0	19.70	19.40	19.40	11.500	—	—	—	
49 30	19.70	19.40	19.40	11.500	—	4.60 начальн.	0 1 включ.	
59 30	—	—	—	—	—	—	0.1 выкл.	
70 30	19.75	19.40	19.40	11.500	—	6.30 после прил.	—	
73 25	19.75	19.40	19.40	11.500	—	—	—	
			Соотношение между током и NH_4NO_3. 2 опыт					
0 0	18.65	18.33	18.3	10.666	—	0.03 нач.	0.2 включ.	
5 0	—	—	—	—	—	—	0.2 выкл.	
25 0	18.80	18.35	18.25	10.666	—	2.93 после прил.	—	
40 35	18.65	18.35	18.25	10.666	—	—	—	
44 0	18.65	18.35	18.25	10.666	—	2.93 нач.	0.2 включ.	
49 0	—	—	—	—	—	—	0.2 выкл.	
56 45	18.80	18.35	18.30	10.666	—	5.90 после прил.	—	
62 30	18.80	18.37	18.30	10.666	—	—	—	

Мешалка приводится периодически вручную

(Продолжение)

Время	Темп. комн. T_1	Темп. резер. R_1 T_2	Темп. выт. воды T_3	Показ. терм. калор. T_4	Бюретка с H_2SO_4	Бюретка с NH_4NO_3	Показ. милли-амперм.	Прим.
64'30"	18.80	18.37	18.30	10.666	—	5.90 нач.	0.2 вкл.	Мешалка вращается непрерывно, но медленно
69 30	—	—	—	—	—	—	0.2 выкл.	
89 25	18.80	18.40	18.30	10.666	—	9.10 после прил.	—	
94 45	18.80	18.40	18.30	10.666	—	—	—	
0 00	18.30	18.15	18.00	10.266	—	9.10 нач.	0.2 вкл.	
5 30	—	—	—	—	—	—	0.2 выкл.	
28 5	—	—	—	10 266	—	12.55 после прил.	—	
34 15	18.30	18.13	18.00	10.270	—	—	—	
35 30	18.30	18.13	18.00	10.270	—	12.55 нач.	0.2 вкл.	
40 30	—	—	—	—	—	—	0.2 выкл.	
55 50	—	—	—	10.266	—	15.93 после прил.	—	
61 30	18.40	18.10	18.03	10.270	—	—	—	
62 40	18.40	18.10	18.03	10.270	—	15.93 нач.	0.2 вкл.	
68 00	—	—	—	—	—	—	0.2 выкл.	
86 0	—	—	—	10.266	—	19.72 после прил.	—	
92 30	18.35	18.13	18.03	10.270	—	—	—	
95 0	18.35	18.13	18.03	10.270	—	19.72 нач.	0.2 вкл.	
100 30	—	—	—	—	—	—	0.2 выкл.	
115 55	—	—	—	10.266	—	23.90 после прил.	—	
122 15	18.40	18.13	18.00	10.267	—	—	—	

во всех последующих опытах температура внутри калориметра никогда не была выше температуры окружающей среды и никогда не была ниже таковой более, чем на 0.4° С. Далее приводим (табл. 3) полученные нами данные, относящиеся к соотношению между подведенной электрической энергией и прилитым раствором азотноаммониевой соли (уд. вес 1.3005 при 30° С), при условии поддержания температуры калориметра близкой к постоянной. (Таблица 3)

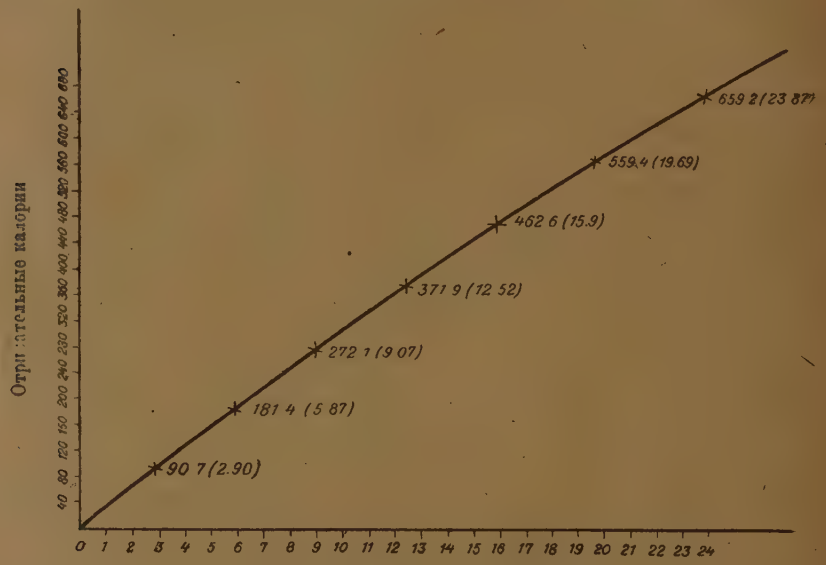
Таблица 4

Время пропуска тока	Сила тока в ампер.	Энерг. выдел. током в г/кал.	Поправка в г/кал.	Число затр. см³ раств. NH_4NO_3 уд. в. 1.3005 при 30°C	Число отрицат. г/кал. на 1 см³ раствора NH_4NO_3	Примечание	Темпер. внутри кал.	Темпер. раствора NH_4NO_3
10′	0.10	45.4	—	1.63	27.9	Добавки раствора NH_4NO_3 велись последовательно, не меняя жидкость в калориметре	19.3	19.4
10	—	—	—	1.30	34.9		—	—
10	—	—	—	1.67	27.2		—	—
10	—	—	—	1.70	26.7		—	—
5	0.20	90.7	—	2.90	31.3		18.4	18.3
5	—	—	—	2.97	30.5		—	—
5	—	—	—	3.20	28.3		—	—
5 30″	—	99.8	—1.6*	3.45	28.5		18.0	18.0
5	—	90.7	—1.6*	3.38	26.4		—	—
5 20	—	96.8	—1.6*	3.79	25.1		—	—
5 30	—	99.8	—0.4*	4.18	23.8		—	—

Таблица 5

Последов. добавки серной кислоты уд. в. 1.5048 (при 30°C) к 400 см³ воды в калор. куб. сантим.	Последов. добавки раствора NH_4NO_3 уд. в. 1.3005 (при 30°C) к 400 см³ воды в калор. куб. сантим.	Теплота, получ. от каждой добавки серной кислоты (по граф. 5-му), в г/калориях	Примечание
1.40	3.96	126	К 400 см³ воды в килорим. добавлялись последовательно: порция серной кислоты — порция раст. NH_4NO_3 до дост. начальн. темпер., затем опять порция H_2SO_4, потом порция раст. NH_4NO_3 и т. д., не меняя жидкость калориметра
1.70	3.14	91	
1.70	3.90	111	
1.85	4.40	120	
1.85	4.70	121	
1.80	4.80	117	
Серная кислота добавлялась к 25 см³ воды во внутр. трубку А килориметра	—	—	
3.85	9.5	280	

Так как точность отсчета по термометру (через трубу) не превосходила 0.002° С, то поправку на нагревание от работы мешалки вводить не имеет смысла, так как она будет за пределами точности наблюдений температуры (по табл. 2 — 20 мин. интенсивной работы мешалки повышают температуру внутри калориметра на 0.004° С). Во всех опытах, указанных в таблице 3, скорость вращения мешалки была по крайней мере в три раза меньше чем та, для которой имеет место нагрев на 0.004° С в 20 мин.



Фиг. 5.

На основании того, что напряжение, приложенное к обмотке нагревательного приспособления, равнялось 6.30 V при силе тока 0.200 A и принимая во внимание данные таблицы 3, получим цифры, приведенные в таблице 4 (объем воды калор. = 400 см³).

Поправки, отмеченные крестиками, внесены на том основании, что калориметр имел температуру 10.270° вместо 10.266° после компенсации энергии тока добавкой раствора NH_4NO_3. При объеме воды в калориметре 400 см³, мы и получаем нескомпенсированную энергию тока равной: 400 (10.270—10.266) = 1.6 кал.; также 400 (10.267—10.266) = 0.4 кал. Так как вода в калориметре и раствор NH_4NO_3 имели всегда в наших опытах почти (с точностью до 0.1° С) одинаковую температуру, то возникает только один

вопрос: как меняется тепловой эффект раствора азотноаммониевой соли, если этот раствор и вода в калориметре сливаются при различных, но для них одинаковых температурах. Данные таблицы 4 дают ответ на этот вопрос. При 19.4° С 2.93 см³ азотноаммониевой соли дают 90.8 отриц. калорий. При 18.4° С 2.90 см³ раствора азотноаммониевой соли дают 90.7 отриц. калор. Подобные разности температур, следовательно, в расчет принимать не надо, тем более, что они у нас были вообще небольшими. Графическое выражение отношения между числом см³ раствора NH_4NO_3 уд. вес. 1.3005, добавленных к 400 см воды в калориметре, и полученным при этом числом отрицательных калорий представлено на фиг. 5.

Установив соотношение между раствором азотноаммониевой соли и даваемым им количеством отрицательных калорий, мы определили тепловой эффект разбавления серной кислоты, прибавляемой непосредственно к воде калориметра. Работа велась так же, как и при опытах компенсации энергии тока теплотой разбавления азотноаммониевой соли, только с тем различием, что здесь тепловой эффект достигался за счет теплоты разбавления серной кислоты при 18° С.

Полученные данные иллюстрирует табл. 5.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построен новый изотермический титровальный микрокалориметр. Расположение приборов и чертеж самого калориметра с приспособлениями представлены на фиг. 2, 3, 4. Калориметр состоит из сосуда Дьюара, окруженного термической изоляцией из ваты; через толстую пробку калориметра (2 пробковых слоя и средний — парафиновый) проходит мешалка, термометр, провода от нагревательного приспособления, широкая закрытая пробкой трубка из стекла, в которой развивается измеряемый тепловой эффект и отверстие, заключающее тонкие трубки-отводы: одна для серной кислоты, другая для раствора NH_4NO_3. Температура калориметра во время опыта не меняется. Объем воды в калориметре 400 см³. Принцип его работы: уравновешивание теплового эффекта отрицательным тепловым эффектом, развиваемым от прибавления раствора NH_4NO_3 к воде калориметра. Особое электрическое нагревательное приспособление или приливание измеренного количества серной кислоты позволяют компенсировать охлаждение, производимое приливанием измеренного количества раствора NH_4NO_3 и наоборот. При разнице между температурой комнаты и температурой внутренности калориметра, не превосходящей 0.4° С, — калориметр

не имеет температурного хода. Нагревание от мешалки не принимается во внимание, вследствие небольшого его значения. Достигнутая точность около 1% от определяемой величины. Для измерения температуры пользовались термометром Бекмана, разделенным на 0.02 доли градуса. Точность отсчета по термометру через трубу $= \pm 0.001°$, т. е. $0.002°$ C или $400 \times 0.002 = \sim 0.8$ кал. Отсюда получается при тепловом эффекте около 90 кал. относит. точность равной 1%. Отсутствие всяких поправок позволяет надеяться при применении более чувствительного термометра получить результаты с калориметром еще значительно более точные.

Считаю приятным долгом поблагодарить акад. В. А. Кистяковского за тему этого исследования и за ценные указания и советы при ее исполнении.

Декабрь 1931 г.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

DU REMPLACEMENT DE LA COLORATION VERTE DES ALGUES PAR LA COLORATION ROUGE DANS LES PROFONDEURS DE LA MER

Contribution à l'étude de l'adaptation chromatique des algues

Par G. A. NADSON

En 1896 E. Batters [1] a cité quelques exemples où les algues marines bleues ou Cyanophycées, végétant à des profondeurs considérables n'étaient plus bleues, mais rouges. J'y ai ajouté un nouvel exemple en 1900 [2] et effleuré la cause de ce phénomène, non mentionnée par Batters, en le rattachant à la théorie bien connue d'Engelmann. En 1927, dans mon article «Sur l'adaptation chromatique chez les algues marines»[3], après avoir exposé une série de mes observations nouvelles et de données confirmatives fournies par d'autres auteurs ayant travaillé après 1900 (Sauvageau, Geitler, Pascher etc.), j'ai conclu que ce changement de coloration pouvait être attribué aussi bien à la qualité qu'à la quantité de la lumière qui pénètre dans l'eau. J'ai pu observer également (ceci a eu lieu pour la première fois sur l'île de Helgoland)[4] que non seulement les algues bleues, mais aussi l'algue perforante l'*Ostreobium Queketti* appartenant au groupe des algues vertes ou Chlorophycés lorsqu'elle végète à une profondeur de 12—16 *m*, n'est plus verte, mais rose ou rouge, d'une couleur pareille à celle des vraies algues «rouges» ou Rhodophycées croissant à côté d'elle. Ses chromatophores contiennent, en plus du chlorophyle, un pigment rouge

[1] E. Batters. New or critical british marine algae. Journ. of Botany, 1896, p. 385.

[2] G. A. Nadson. Die perforierenden (kalkbohrenden) Algen und ihre Bedeutung in der Natur.—Scripta Botanica Horti Univ. Petropol. f. XVIII, 1900 (avec un résumé détaillé en allemand). Pour mes recherches v. aussi Gaidoukoff. N. Die Farbe der Algen und des Wassers. «Heidewigia», 1904.

[3] G. A. Nadson. Mélanges botaniques offerts à M. J. Borodine à l'occasion de son jubilé. Leningrad, 1927 (avec un résumé détaillé en français).

[4] G. A. Nadson. Scripta Botanica, l. c.

soluble dans l'eau et insoluble dans l'alcool, appartenant au groupe d'hydrochromes. [1] Ce pigment est très rapproché de la phycoérythrine des algues rouges et lui est peut-être même identique.

Étant amené des profondeurs jusqu'aux régions plus rapprochées de la surface, p. e. par une forte tempête, ou bien étant transporté dans l'aquarium, l'*Ostreobium* rose perd son pigment rouge, verdit peu à peu et se transforme enfin en une forme verte, telle qu'elle a été décrite en 1889 par Bornet et Flahault, tout en continuant à végéter et à se propager normalement. De cette façon la couleur n'est pas une propriété héréditaire fixe. On peut observer parfois un changement de couleur graduel chez le même individu: une partie de l'algue se trouve être rouge et l'autre verte. [2] Les observations ont montré également que dans les profondeurs on trouve des exemplaires rouges aussi bien que verts.

En feuilletant la littérature j'ai appris plus tard que Hansen[3] avait déjà constaté en 1895 la présence du pigment rouge soluble dans l'eau et insoluble dans l'alcool chez l'algue verte *Bryopsis disticha* végétant dans le Golfe de Naples. Toutefois il y avait peu de pigment, de sorte que la couleur du chromatophore, examinée au microscope, était un «vert pur». [4]

Malheureusement cet auteur, ayant noté un fait tout pur, n'a indiqué ni la profondeur de l'habitat, ni les conditions d'existence de cette algue et a passé outre. Les explorateurs ultérieurs n'y ont pas fait attention non plus.

[1] J'ai été le premier qui, sous le nom d'Hydrochromes ai réuni les pigments des chromatophores d'algues solubles dans l'eau et insolubles dans l'alcool; leurs représéntants typiques sont la phycoérythrine et la phycocyane. Plus tard ce terme fut appliqué également par d'autres auteurs. — G. A. Nadson. Scripta Botanica. Horti Univ. Petropol., 1892, t. IV.

[2] L'existence de la forme rouge de l'*Ostreobium* fut confirmée plus tard par d'autres auteurs: Chalon, Hariot, Kolderup-Rosenvinge et recemment par Printz; «Ich konnte,—dit-il—mit voller Sicherheit ein und denselben» Faden von den roten Teilen bis zum vollständig charakteristisch grün gefärbten Faden verfolgen» (H. Printz. Die Algenvegetation des Trondjemsfiordes. Skrifter det Norske Videnskals-Akademi i Oslo. Mat.-Natur. Kl. 1926. N 5, p. 257; L. Kolderup Rosenvinge. The marine Algae of Denmark. P. IV. Mém. Acad. Sci. Copenhagne. Sect. Sci. 7 sér. t. VIII, 1931, p. 618).

J'ai également observé (1900) un phénomène analogue chez une algue Cyanophycée *Spirulina versicolor* Cohn; à des profondeurs considérables elle est violette et dans l'aquarium elle verdit tout en continuant à se développer. Il ne faut pas oublier que les algues rouges véritables (Rhodophycées), lorsqu'elles végètent à de petites profondeurs, plus près de la surface de la mer, peuvent également devenir vertes à un degré different. Je l'ai observé moi-même et cela avait souvent été indiqué dans la littérature.

[3] A. Hansen. Über Stoffbildung bei den Meeresalgen. Mitteilungen aus der Zoolog. Station zu Neapel. Bd. II. 1895. S. 297.

[4] Hansen a trouvé ce pigment en quantité un peu plus grande aussi chez les algues brunes *Taonia atomaria* et *Dictyota dichotoma*.

Les formes rouges des algues «bleues», p. e. des algues perforantes *Hyella caespitosa*, *Mastigocoleus testarum*, *Plectonema terebrans*, aussi bien que celles de l'algue verte *Ostreobium Quekett*i, se rencontrent, d'ailleurs, non seulement à de plus grandes profondeurs, mais aussi à une profondeur insignifiante, de moins de 10 *m* pourvu que l'eau elle-même soit moins transparente, p. e. dans des baies dont l'eau est quelque peu trouble (comme dans certaines parties du golfe de Sébastopol ou de la baie d'Hapsal), si ces algues végètent à l'ombre d'algues plus grandes,[1] p. e. sur des coquilles de *Mytilus* ou de *Patella*, ombragées par une grande algue brune *Cystoseira*.[2]

J'ai constaté la même chose sur le côté inférieur moins éclairé des coquilles de *Pecten* gisant au fond.[3] D'autre part on sait que les algues rouges (Rhodophycées) peuvent végéter en conservant leur couleur rouge caractéristique également dans des eaux peu profondes, mais en des endroits ombragés.

En me basant sur les recherches que j'ai entreprises dans le golfe de Sébastopol en été 1929, de même que sur les données que j'en ai reçues à diverses époques, je puis compléter ce qui précéde par de nouveaux faits. Dans le golfe susdit en face de «Baie Ronde» et près du phare de Chersonèse, on a recueilli à une profondeur de 30—40 *m* (21 XI 1929) des coquilles vides de *Pecten* et de *Cardium* recouvertes de taches vertes, bleu-vertes et rouges provenant des algues perforantes. La couleur rouge y variait du rose tendre au pourpre clair. Par endroits les coquilles étaient tellement rongées et amincies qu'on les trouait en y appuyant le doigt. Les algues étaient vivantes et trés bien développées.

Les deux formes perforantes appartenant au groupe des algues «bleues» l'*Hyella caespitosa* et le *Plectonema terebrans*, avaient ici une jolie teinte rose. A côté d'elles se trouvait un *Ostreobium Quecketti* rose et une *Gomontia polyrhiza* Bornet et Flahault[4] colorée en rose avec des sporanges mures et des spores de la même couleur rose.

1 G. A. Nadson. Contribution à l'étude des algues perforantes. 1932.

2 L'algue rouge *Melobesia cystoseirae* végétant à l'ombre de l'algue *Cystoseira* est d'une couleur rose identique à celle de l'*Ostreobium Quekett*i qui la perfore. Lorsque l'algue rouge calcaire *Lithothamnion* verdit par places, l'*Ostreobium* (qui la perfore) verdit également aux mêmes endroits et garde ailleurs la même couleur que le *Lithothamnion* (je l'ai observé dans le golfe de Naples). De même, près d'Helgoland, à une petite profondeur sur des rochers calcaires à des endroits ombragés par de grandes algues, j'ai trouvé des formes roses d'*Ostreobium* et dans des endroits decouverts—des formes vertes.

3 G. Nadson. Mélanges, 1927 l. c. J'y ai exposé cette question d'une manière plus detaillée en me basent principalement sur mes recherches dans la Mer Noire.

4 Bornet et Flahault, l. c., p. 152.

De même que l'*Ostreobium*, la *Gomontia* appartient au groupe des algues vertes, Chlorophycées; elle doit être classée, d'après mes recherches, dans la famille des Chaetophoracées. Comme chez l'*Ostreobium* on pouvait constater également chez la *Gomontia* qu'une partie du thalle était colorée en rose et l'autre en vert. On y trouva encore une algue perforante, décrite aussi par Bornet et Flahault[1] sous le nom de *Zygomitus reticulatus*; elle appartient aux algues «vertes» et avait ici une couleur rose.

Il est intéressant qu'en plus de ces formes perforantes pénétrant à l'intérieur des coquilles, deux autres algues végétant à la surfase de celles-ci et rentrant également dans le groupe des algues «vertes» (Chlorophycées), étaient ici non pas d'une couleur verte (comme elles étaient connues jusqu'alors) mais de la même couleur rose. Ce sont deux nouvelles espèces d'algues: *Pseudulvella Nadsonii* Rochl. et *Epicladia pontica* Rochl. Elles sont décrites par E. J. Rochlina dans un article spécial.[2]

Chez ces algues, comme chez l'*Ostreobium* le pigment rose colore les chromatophores en masquant le chlorophyll; il est soluble dans l'eau, insoluble dans l'alcool; s'il est exposé à la lumiére pendant un temps prolongé, il se détruit; si on le fait bouillir, on le détruit également; à ce qu'il paraît, il se rapproche de très près de la phycoérythrine des Rhodophycées.

Cependant, à côté des individus rouges de ces algues, de même que chez l'*Ostreobium*, on rencontre aux mêmes profondeurs des individus verts en quantité plus ou moins grande; souvent la prédominance des individus rouges est très marquée.

Il est difficile pour le moment d'expliquer exactement pourquoi tous les individus n'y sont pas de la même couleur. On ne saurait s'abstenir de mettre en parallèle un phénomène analogue lorsqu'à des profondeurs considérables on voit se développer, l'une à côté de l'autre, des algues vertes, Chlorophycées, et rouges, Rhodophycées. Par exemple, au printemps 1914, dans le golfe de Naples, en draguant à une profondeur 75—80 *m* (Secca di Bocca Piccola), on trouva une flore abondante d'algues rouges (*Gracillaria*, *Phyllophora*, *Lithothamnion*) et vertes (*Halimeda*, *Udotea*, *Valonia* etc.) en grande quantité. J'y ai trouvé également des individus

[1] Bornet et Flahault, l. c., p. 160.

[2] Bullet. de l'Acad. d. s. de l'URSS, 1932, p. 687. — Je crois devoir exprimer ici à M-me E. J. Rochlina ma sincère reconnaissance pour l'assistance qu'elle m'a prêtée dans l'examen des algues perforantes de la Mer Noire.

[3] G. Funk. Die Algenvegetation des Golfes von Neapel. Publicazioni della Staz. Zoologica di Napoli, 7 Suppl., 1927, p. 208.

verts d'*Ostreobium* à côté des individus rouges. Ces phénomènes exigent certainement une étude plus approfondie.

Comment peut-on expliquer le remplacement de la coloration verte ou bleu-verte par la coloration rouge à des profondeurs considérables ou à des endroits ombragés? Sans aucun doute, nous avons ici l'adaptation de l'organisme à un certain éclairage du milieu ambiant, et la lumière qui pénètre joue un rôle fort important au point de vue de sa quantité de même que de sa qualité; nous avons devant nous des exemples éclatants de l'adaptation chromatique. Ensuite, en plus de sa participation à la photosynthèse, la coloration rouge joue peut-être aussi un rôle protecteur pour l'algue, car, étant complémentaire à la coloration du milieu ambiant (l'eau à une profonduer de moins de 10 *m* étant d'une couleur verte ou bleu-verte),[1] elle rend l'algue moins apparente et par conséquent mieux protégée, de même que cela a lieu pour les animaux dans des conditions correspondantes.

En tout cas, le problème qui se pose est plus compliqué qu'on ne l'a cru jusqu' à présent et la coloration des algues est le résultat de l'actio réunie de plusieurs facteurs et du processus compliquè de la lutte pour l'existence, ainsi que je l'ai déjà indiqué dans mon travail de 1900 (l. c.).

Leningrad, Mai 1930.

Г. А. НАДСОН. О ЗАМЕНЕ ЗЕЛЕНОЙ ОКРАСКИ ВОДОРОСЛЕЙ КРАСНОЙ В ГЛУБИНАХ МОРЯ

РЕЗЮМЕ

Не только самые различные «синезеленые» или «цановые» водоросли (*Cyanophyceae*) на более или менее значительных глубинах становятся красными не отличимыми по цвету от настоящих «красных» водорослей или «багрянок» (*Rhodophyceae*), но и многие водоросли, принадлежащие к группе «зеленых» (*Chlorophyceae*), способны к такого же рода хроматической адаптации. В особенности в этом отношении интересна «сверлящая» зеленая водоросль

[1] Brooker Klugh, en étudiant la pénétration des rayons dans la profondeur des eaux, a établi que, déjà à une profondeur de 10 *m*, la couleur de l'eau est verdâtre et que la proportion des rayons de couleurs différentes est la suivante: rayons rouges 0, bleus 0, verts 2.5% (Brooker Klugh, A. Light penetration into the bay of Fundy. «Ecology», vol. 8, 1927. p. 90).

Ostreobium, Queketti. Такая же замена зеленой окраски красной происходит не редко, когда «зеленая» или «синезеленая» водоросль растет в местах, достаточно затемненных. Новым фактом в той же области, подтверждающим правило хроматической адантации, является нахождение на глубинах Севастопольской бухты красных форм типичных зеленых водорослей: *Gomontia polyrhiza*, *Zygomitus reticulatus*, *Pseudulvella Nadsonii* и *Epicladia pontica*.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

UBER ZWEI NEUE ALGEN AUS DEM SCHWARZEN MEER: *PSEUDULVELLA NADSONII* UND *EPICLADIA PONTICA*

Von E. ROCHLINA

(*Présenté par* G. A. Nadson, *membre de l'Académie des Sciences*)

An den Pectenschalen, welche in November 1929 aus bedeutender Tiefe (30—50 Meter) der Bucht von Sebastopol, nicht weit von der «Runden Bucht» und dem Chersones'schen Leuchtturm gedredscht wurden, sind 2 neue Chlorophyceen gefunden worden. Beide Algen erschienen bald rosa-, bald grüngefärbt.

1. Pseudulvella Nadsonii nov sp.

Der Thallus stellt ein dünnes Scheibchen dar; Durchmesser ungefähr von 0, 5 mm (Fig. 1—2). Der gewöhnlich zweischichtige Thallus kann an der Peripherie auch aus einer Zellschicht bestehen. Auf der Fig. 2 sind Stellen zu sehen, an denen Zellen der unterliegenden Schicht durchschimmern. Der Thallusrand erscheint als glatter verdickter Saum, dessen Breite bis zu 5 μ erreichen kann. Im Zentrum des Scheibchens befinden sich grössere Zellen von runder, ovaler oder vielkantiger Form, welche ohne bestimmte Gesetzmässigkeit geordnet sind. Weiter aber lagern sich die Zellen in regelmässigen radialen Reihen. Fächerartige Lagerung dieser Zellen ist an den beiliegenden Mikrophotographien (Fig. 1—2) zu sehen. Es lassen sich auch häufig nicht ganz von einander getrennte Zellen von seltsamer Form beobachten.

Die wandständigen Chromatophoren enthalten 1—2 bis 3 Pyrenoide (Fig. 2). Die Pyrenoide treten gewöhnlich in jungen Exemplaren deutlich hervor, in den alten sind sie aber häufig gar nicht bemerkbar. In den Zellen sind auch Stärkekörner um die Pyrenoide zu sehen; häufiger aber nimmt

der ganze Inhalt der Zellen (auch die ziemlich dicke Zellwände) unter der Einwirkung des Chlor-Zink-Jod's eine diffuse blau-violette Färbung an.

Die Grösse der zentralen Zellen beträgt: Breite 8—14 μ; Länge 8—16 μ. Weiter zu der Peripherie hin nehmen die Zellen an Länge zu (11—16 μ); ihre Breite erreicht 5—7 μ; dann aber werden die Zellen wieder kürzer und nehmen eine viereckige resp. quadratische Form an; ihre Breite 3—5 μ, die Lange 3—8 μ.

Fig. 1. *Pseudulvelia Nadsonü* Rochl.

Die Rosafärbung dieser in bedeutender Tiefe wachsenden Alge ist als Folge ihrer chromatischen Adaptation anzusehen. Eingehend wird diese Frage in einem Artikel von Prof. Dr. G. A. Nadson erörtert.[1]

Diese Alge stellt eine neue Art der Gattung *Pseudulvella* Wille dar. Sie steht am nächsten zur *Pseudulvella americana* (Snow) Wille (*Ulvella americana* Snow=*Chaetopeltis americana* Collins), unterscheidet sich aber durch eine Reihe von Merkmalen. *Pseudulvella americana* (Snow) Wille ist eine Süsswasserform, die in Amerika in der Nähe von Ann Arbor, Michigan gefunden worden. Jhr Thallus ist einschichtig, manchmal im Zentrum mehrschichtig. Der Chromatophor besteht aus runden oder ovalen Körperchen. Jede Zelle hat je ein Pyrenoid. Die Zellwände sind schleimig

[1] G. A. Nadson. Du remplacement de la coloration verte des algues par la coloration rouge dans les profondeurs de la mer. BAS-MN, 1932, № 5, p. 681.

und nehmen die blauviolette Färbung nach Bearbeitung mit Chlor-Zink-Jod nicht an. Die Grösse der Zellen variiert: an der Peripherie beträgt die Länge 10—27 μ und die Breite 5—13 μ; im Zentrum sind die Zellen fast rund mit einem Durchmesser von 10—13 μ.

Die von uns beschriebene Alge ist eine Meeresform, mit einem zweischichtigen Thallus. Der Chromatophor stellt ein wandständiges Scheibchen

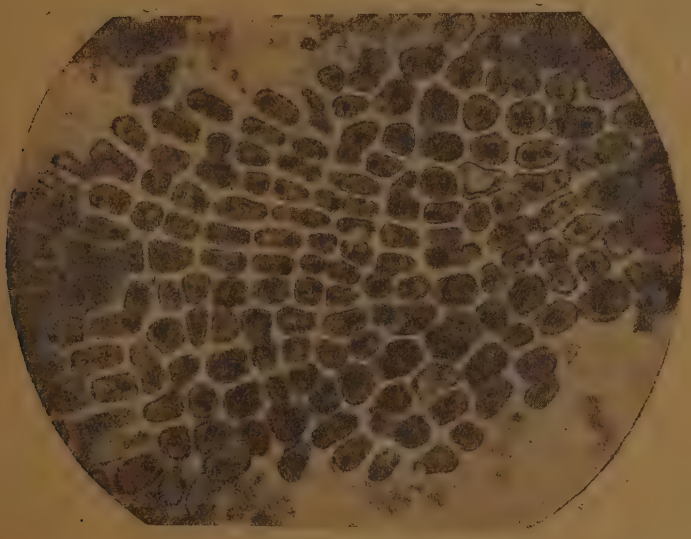


Fig. 2. *Pseudulvela Nadsonii* Rochl.

dar. Die Zellwände geben Zellulosereaktion. Die Zellen sind fächerartig geordnet und zeichnen sich durch andere Dimensionen aus.

Diese morphologischen Eigentümlichkeiten veranlassen uns diese Form als eine neue Art unter dem Namen *Pseudulvella Nadsonii* Rochl. zu betrachten.

2. **Epicladia pontica** nov. sp.

Der einschichtige Thallus ist 0.25—0. 5 *mm.* gross und besteht aus den sich strahlenartig ausbreitenden, nicht immer regelmässig geordneten Fäden (Fig. 3).

Im zentralen Teil des Thallus wachsen die Fäden fest zusammen. Es bildet sich ein Plättchen aus kleinen Zellen mit dicken Wänden, die eine Art von Pseudoparenchym darstellt. Von diesem zentralen Plättchen gehen

häufig verzweigte Fäden ab, die eine Länge von 270—300 μ erreichen können.

An den Verzweigungsstellen der Fäden befinden sich gewöhnlich hufeisenförmig gebogene oder dichotomisch geteilte Zellen. Diese Zellen sind für *Epicladia* sehr charakteristisch (Fig. 3). Die Zentralzellen sind fast isodiametrisch, rund, oval oder vielkantig. Die Zellen der Fäden sind in die Länge gestreckt. Die Breite der Zentralzellen beträgt 2.7—5.3 μ; ihre Länge ist die gleiche oder doppelt so gross. Die Breite der Fädenzellen ist 5.4—10.8 μ; ihre Länge ist 2—4 Mal grösser.

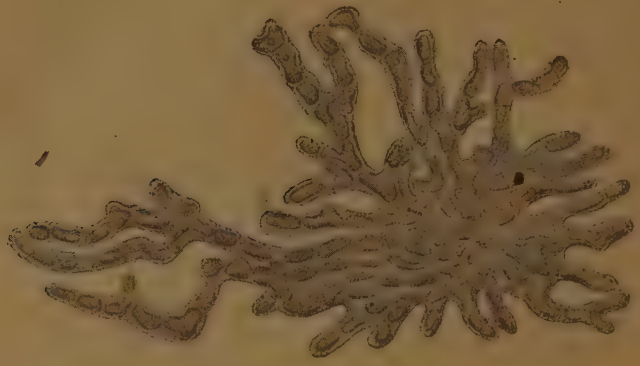


Fig. 3. *Epicladia pontica* Rochl.

Die Zellen enthalten einen parietalen Chromatophor, in dessen Innern befindet sich ein Pyrenoid in Form eines stark lichtbrechenden Körperchens.

Häufig zergliedert sich der Thallus in Zellgruppen oder sogar in einzelne isolierte Zellen mit sehr dicken Wänden (Desaggregatzustand des Thallus).

Und diese Alge kann sowohl grün als auch rosa gefärbt sein.

Sie steht am nächsten zur *Epicladia Flustrae* Reinke, unterscheidet sich aber von ihr durch einige Merkmale. Die Breite der äusseren Fäden der *Epicladia Flustrae* beträgt nach Reinke und Collins 5—10 μ und der Durchmesser der Zentralzellen nach Reinke 12—20 μ; nach Collins 7—12 μ.

Unsere Form unterscheidet sich von *Epicladia Flustrae* und *Epicladia Halimedae* Hansgirg auch dadurch, dass die Zentralzellen bedeutend kleiner als die peripherischen sind, während bei den zwei anderen Arten die Zellen im Zentrum grösser als die Fädenzellen sind.

Die Zellendimensionen bei *Epicladia Halimedae* Hansgirg sind: die Breite der äusseren Zellen 5—7 μ und die Länge 2—5 Mal grösser.Die Zentralzellen sind isodiametrisch und ihre Breite beträgt 10—15 μ; die Länge ist 1—2 Mal grösser.

Wir nennen unsere neue Art *Epicladia pontica* Rochl.

LITERATUR

Batters, B. A. — New or critical british marine algae. The Journ. of Bot., vol. XXXV, 1897, p. 434.

Collins, F. S. — The green algae of North America. Tufts Colledge Studies, vol. II, № 3 1909, p. 285—287.

Dangeard, P. — *L'Ulvella lens* de Crouan et *l'Ulvella Setchellii* sp. nov. Bull. Soc. Botan. de France, t. 78, 1931, p. 312.

Gardner. New *Chlorophyceae* from California. Univ. of California Publications in Botany, vol. 3, 1907—1909, p. 373.

Hansgirg, A. — Neue Beiträge zur Kenntniss der Meeresalgen- und Bakteriaceen,Flora der österreichisch-ungarischen Küstenländer. Sitz. ber. der böhm. Ges. d. Wiss., Jahrg. 1892, S. 232.

Hazen Tracy Elliot. — The *Ulothrichaceae* and *Chaetophoraceae* of the United States. Mem. of the Torrey Bot. Club, 1901—1902, p. 135—250.

Setchell, W. A. and Gardner, N. L. — The marine algae of the pacific coast of North America. Part II. *Chlorophyceae*. Univ. of California Publications in Botany, vol. 8, № 2, 1920, p. 295—299.

Snow, J. W. *Ulvella americana*. Bot. Gaz., vol. XXVII, 1899, p. 309.

Leningrad
Mai 1930.

Э. Я. РОХЛИНА. ДВЕ НОВЫЕ ВОДОРОСЛИ ИЗ ЧЕРНОГО МОРЯ: *PSEUDULVETLA NADSONII* И *EPICLADIA PONTICA*

РЕЗЮМЕ

В Севастопольской бухте на глубине 30—50 метров на раковинах *Pecten* были найдены две микроскопические водоросли, принадлежащие к родам *Pseudulvella* и *Epicladia*. На основании совокупности морфологических признаков (рис. 1—3) они являются новыми видами этих родов. Они бывают зеленого или розового цвета, представляя хороший пример хроматической адаптации к условиям жизни на значительных глубинах.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

О МИКРООРГАНИЗМАХ В ПОДПОЧВЕННЫХ СЛОЯХ И О БИОХИМИЧЕСКИХ ФАКТОРАХ ВЫВЕТРИВАНИЯ

Д. В. СОКОЛОВА

(*Представлено академиком* В. И. Вернадским)

Вопрос о биохимических факторах выветривания горных пород, к сожалению, еще не привлек к себе того внимания и интереса со стороны геологов, которые должны быть ему уделены. Причина этого, возможно, заключается в том, что наиболее интересные относящиеся к нему фактические данные содержатся в трудах биологов или, во всяком случае, публикуются в биологических изданиях, обычно ускользающих от внимания геологов.

Между тем, значение биохимических факторов в процессах превращения земной коры и возникновения новых геологических образований, видимо, очень велико. Если принять во внимание плодотворную схему геологического цикла, предложенную Э. Огом, то следует признать, что названные факторы играют активную роль в двух фазах этого цикла — глиптогенезе и литогенезе и только в третьей фазе — орогенезе остаются пассивными. При этом, я имею в виду не мир высших или, вообще, сравнительно высокоорганизованных существ: их деятельность в земной коре ограничена весьма узкими пределами поверхности литосферы и некоторой части дна гидросферы, ибо граница их распространения в глубину определяется теми, сравнительно очень немногими метрами, в пределах которых существуют в земле корни растений и роющие ее животные.

Меня в особенности интересует огромный мир микроорганизмов и среди них, в частности, анаэробных, живущих в бескислородной среде, с минеральным типом питания (прототрофы), пределом распространения которых в глубину являются, рассуждая теоретически, лишь те термические зоны,

за которыми существование протоплазмы становится уже невозможным. Даже условия давления в земных недрах отходят в этом случае на задний план, так как, при ничтожно малых размерах микроорганизмов, они могли бы помещаться в порах минералов и горных пород, на глубинах во много километров, где породы еще не перешли в пластическое состояние, с окончательным заполнением пор, но где, однако, условия термической действительности исключают возможность пребывания живого вещества. С другой стороны, анаэробные микроорганизмы, способные жить и размножаться вне всякой прямой зависимости от солнца и атмосферы, могут, казалось бы, существовать в осадочных отложениях земных глубин с более или менее отдаленных времен литогенеза этих напластований, не говоря уже о возможности проникновения в последние с подземными водами.

По причинам, отчасти указанным вначале, я не могу дать сколько-нибудь полных литературных справок по только что сказанному и приведу лишь некоторые, довольно случайные, но не лишенные интереса указания.[1] Так, R. Lieske и E. Hofmann[2] сообщают, что в пластах каменного угля на глубинах от 400 до 1089 м им удалось обнаружить живые бактерии и выделить из стерильно-взятых проб на различных питательных средах микроорганизмы, которые авторы считают характерными для больших глубин. В сопровождающих угли песчаниках и глинистых сланцах бактерий не оказалось. Температура на достигнутой глубине (1089 м) была 30—40°, но авторы не думают, чтобы эта глубина была предельной для присутствия бактерий, и полагают, что таковым пределом может быть зона с температурой около 70°. Они оставляют открытым вопрос о том, как проникли бактерии на столь большие глубины и находятся ли они там в состоянии вегетативном, или же в виде спор. Однако, содержание воды в слоях, откуда выделены бактерии, очень незначительно и составляет всего 1.5—2%, что, по моему мнению, скорее говорит в пользу «первичного» содержания бактерий в ископаемом угле, а не проникновения их с подземной водой. Правда, в несколько более ранней работе, те же авторы[3] отмечают, что рудничные воды редко бывают стерильны и что струи пропускаемого в шахты воздуха всегда содержат много зародышей, но, все же, они устанавливают, что на больших изученных ими тогда глубинах

[1] В сборе их я обязан содействию моей бывшей сотрудницы по отделу сырья Гос. института строительных материалов Н. С. Мануйловой.

[2] Untersuchungen über den Bacteriengehalt der Erde in grossen Tiefen. Cbl. Bacter. Bd. 77, 1929.

[3] Untersuchungen über die Microbiologie der Kohlen in ihrer natürlichen Lagerstätten. Brennstoff-Chemie, № 17 Bd. 9, 1928.

(400—750 м) земля не стерильна и бактерии находятся в самих угольных пластах. Во всяком случае, какого бы происхождения ни было это бактериальное население, важен факт его присутствия в угольных пластах и его несомненной биохимической активности, поскольку это — живое, а не мертвое население.

Затем, необходимо сослаться на работы E. Bastin и R. Gahl и B. Andersson,[1] изучавших причину слабой концетрации сульфатов в нефтяных водах, в связи с содержанием сероводорода и свободной серы в нефти. Основываясь на работах первого, доказавшего в 1926 году, что эти явления обусловлены восстановительной деятельностью живых бактерий, которых он открыл в нефтяных водах 23 из 25 изученных им скважин Иллинойса, опущенных на глубину от 150 до 450 м (до девона), два последних автора исследовали 40 скважин в Калифорнии и в 17-ти им удалось выделить восстанавляющие сульфаты бактерии. Интересно, что пробы из поверхностных вод дали отрицательные результаты, положительные же были получены лишь в пределах глубин от 230 до 940 м (в круглых цифрах), где температура достигала 47°, тогда как при температуре в 36°, свойственной меньшим глубинам, бактерий не оказалось. Таким образом, это — весьма замечательный пример микроорганизмов, с какими то специфическими глубинными условиями существования. При этом Bastin не считает исключенной возможность того, что бактерии существуют в недрах с далекого (девонского) времени отложения содержащих их пород.

У нас тем же вопросом занимался Н. Т. Ушинский,[2] установивший в нефтяных водах Биби-Эйбата, на глубине до 500 м присутствие восстановляющих сульфаты и денитрифицирующих бактерий, чем он и объяснял наличие сероводорода в этих водах.

Видимо, такое же происхождение имеет сероводород во многих артезианских водах и минеральных источниках.

В сопоставлении с этими данными, любопытно упомянуть, что есть целая литература,[3] трактующая о присутствии в нефтях ряда бактерий, которые обладают избирательными свойствами по отношению к главным

[1] E. S. Bastin. Bull. Amer. Associat. Petrol. geolog., vol. X. № 12, 1926. — R. Gahl an Andersson. Sulfat reducing Bacteria in California Oil Waters. Cbl. Bacter., Bd. 73, 1928.

[2] Н. Т. Ушинский. К вопросу о происхождении серных вод на побережьи Каспийского моря. — Азерб. нефт. хоз. № 8—9, 1926, стр. 83, 84 (приводится литература на русском и иностранных языках).

[3] См.: J. Tausz und M. Peter. Neue Methode der Kohlenvasserstoff-Analyse mit Hilfe von Bacterien. Cbl. Bacter. (2). Bd. 49, 1920. — Вл. Будкевич. О бактериях, усвояющих углеводороды. Успехи экспер. биол., т. II, вып. 2, 1923.

нефтяным углеводородам и способны разлагать парафиновые углеводороды открыто-цепного строения, оставляя нетронутыми циклические нафтены. В этом удивительном процессе нефть служит источником углерода и энергии для микроорганизмов, которые, следовательно, оказывают глубокое биохимическое воздействие на предельные углеводороды, вообще крайне стойкие перед химическими реагентами.

Однако, нефть и уголь, как чисто-биогенные образования, находятся в особом положении, и мне пришлось коснуться их лишь для того, чтобы показать, на каких значительных глубинах уже обнаружены химически-активные микроорганизмы. Впрочем, работа в этом направлении только еще начинается, и по отношению к глубоко залегающим минералогенным осадочным породам нам не удалось найти литературных указаний.

Зато по вопросу о влиянии микроорганизмов на выветривание обнаженных на поверхности пород существует обширная литература, насчитывающая уже более 50 лет успешного развития.[1] Совершенно не касаясь почвообразования и круговорота отдельных элементов (сера, фосфор, железо, марганец, кальций), в чем выдающаяся роль микроорганизмов установлена вполне определенно, я приведу теперь несколько наиболее интересных литературных справок об участии их в разложении и перемещении минеральных веществ.

В 1899 г. А. А. Вериго опубликовал работу, посвященную, главным образом, происхождению лечебных грязей,[2] в которой он, между прочим, сообщил о своих опытах над влиянием бактерий на образование доломитов. Собственно, эту мысль высказал еще в 1893 г. J. Walter, но А. А. Вериго экспериментально доказал, что помещенный в пробирку и зараженный одной бактерией (*Proteus vulgaris*) ил через $1^1/_2$ года обнаружил глубокие изменения: в нем появились желтовато-белые шарики, оказавшиеся при анализе доломитизированным известняком оолитовой структуры; в не зараженных же пробирках этого не случилось.

Чрезвычайно интересные данные сообщает J. Bassalik.[3] Он оперировал с 14 формами бактерий, содержащимися в почве и высеянными из кишечника земляных червей, и изучил их действие на следующие, измельченные в порошок, минералы: ортоклаз, микроклин, олигоглаз, лабрадорит, нефелин,

[1] Кажется, впервые Th. Schloesing и A. Müntz в 1877 г. сообщили о влиянии бактерий на разложение пород (Sur la nitrification par les ferments organisés. C.R. de l'Acad. des Sciences. LXXXV, 1877).

[2] Лечебные бальнеологические средства Черноморского побережья. Труды I Съезда деятел. по климатол. и пр., т. I, 1899.

[3] Über Silikatersetzung durch Bodenbacterien. — Ztschr. Gährungsphisiol., Bd. 2, 1912.

лейцит, муковит, мераксен, оливин, авгит, роговая обманка, турмалин и апатит. Особенно активным проявил себя микроорганизм *Bacterium extorquens* n. sp., что автор объясняет его свойством плотно обволакивать частицы минералов («innige Kontakt») и сильным процессом его дыхания, ибо дрожжи, несмотря на свою более значительную химическую активность, оказали на минералы гораздо меньшее действие, чем бактерии. Значение последних заключается в том, что выделяемые ими угольная и другие кислоты, особенно органические (у некоторых бактерий), переводят в раствор минералы, принадлежащие, как видно из списка, всевозможным силикатам более или менее сложного состава. При этом, различные бактерии не одинаково ведут себя по отношению к разным минералам. Так, упомянутый *B. extorquens* хорошо разрушает полевые шпаты, тогда как азотные бактерии лучше растворяют минералы, содержащие щелочные земли, чем минералы, относительно богатые трудно растворимыми кремнеземом и глиноземом. Очень легко растворяется магнезиальная слюда, что, помимо ее щелочно-земельного состава, связано, вероятно, с ее совершенной спайностью, благодаря которой, при измельчении минерала, получается увеличение поверхности соприкосновения его с микроорганизмами. Вообще же, легче всего в раствор переходят щелочи, затем щелочные земли, железо и кремнезем, а труднее всего — глинозем. Если принять во внимание, что процесс происходит на холоду и в природных условиях не ограничен временем и что в списке Bassalik значатся почти все главные породообразующие минералы, значение этой работы не требует особых пояснений для геолога: сам автор приходит к выводу, что бактериям принадлежит выдающаяся роль при разложении силикатов в природе.

Далее, в работе акад. В. Л. Омелянского,[1] помимо ряда ценных исторических справок, среди которых он упоминает о вышеприведенной работе Bassalik, приводятся и прямые опыты над растворением различных солей микроорганизмами и отмечается огромное значение фактора времени в природе: в самом деле, если у Bassalik, в ограниченных пределах произведенного опыта, *Bact. extorquens* перевел в раствор лишь 0.91% взятого для исследования полевого шпата, то в природе этот процесс, имея в своем распоряжении многие века, приводит к появлению мощных масс глин.

Не мало интересных данных сообщает также Ю. А. Равич-Щербо,[2] оперировавший с различными аэробными и анаэробными бактериями над

[1] Роль микроорганизмов в выветривании горных пород. Юбилейный сборник, посвященный акад. Бородину, 1927.

[2] О роли микроорганизмов в выветривании горных пород. Архив биол. наук, т. XXVI, 1928.

углекислыми минералами (кальцит, арагонит, сидерит, доломит, магнезит), при чем было обнаружено неодинаковое действие разных бактерий на отдельные минералы, в зависимости от свойств последних и химической активности первых: так, магнезит и сидерит были весьма стойкими даже перед бактериями, образующими сильно активные органические кислоты, тогда как мел, арагонит и кальцит показали гораздо более легкую растворимость, что соответствует и относительной растворимости всех поименованных минералов в воде, содержащей кислоты слабой концентрации.

Наконец, надлежит сослаться на труды акад. В. И. Вернадского, слишком многочисленные и богатые содержанием, чтобы их можно было удовлетворительно изложить в настоящем сообщении. Говоря кратко, В. И. Вернадский устанавливает два типа химически-активных веществ, действующих в земной коре: это — радиоактивные элементы и живое вещество, населяющее биосферу.[1] Последнему он придает громадное значение и в ряде своих работ[2] утверждает сложные биохимические функции, выполняемые простейшими одноклеточными организмами, и указывает, что со времени возникновения биосферы и связанных с ней процессов выветривания минеральный состав поверхностных частей литосферы стал совершенно иным, сравнительно с тем, каким он был до появления на земле жизни. Как частность, следует отметить, что даже каолиновое ядро, являющееся постоянным компонентом всевозможных глин и многих минералов (полевые шпаты, слюды и пр.), исключительно стойкое перед обычными земными реагентами и разрушаемое лишь сильными кислотами при высоких температурах, разлагается под действием простейших растений (диатомеи) и бактерий, при низкой температуре, с выделением тепла, которое, следовательно, ставит эти микроорганизмы вне прямой зависимости от теплоты солнца.

Все эти данные,[3] конечно, очень скудны, отрывочны и неполны, и это происходит не только по моей вине, хотя и трудно подобрать литературу, рассеянную в мало известных геологу изданиях, но и по существу дела, ибо пока мы имеем лишь разрозненные фрагменты и наброски мыслимой только в будущем, цельной и сколько-нибудь законченной картины воздействия биосферы на литосферу. Как бы то ни было, уже и теперь некоторые важные выводы намечаются с достаточным основанием, а именно:

[1] Очерки геохимии, 1927.

[2] См. ИМЕН, 1931, №№ 3 и 5 и многие другие работы на русском и иностранных языках.

[3] Из собранного литературного материала я привел здесь лишь самое существенное.

1) Микроорганизмы способны населять сравнительно глубокие части литосферы и оставаться в них жизнедеятельными.

2) Микроорганизмы способны переводить породообразующие минералы в растворы и, следовательно, вызывать разрушение горных пород и перемещение их химических компонентов.

3) Микроорганизмы способны также и отлагать минеральные вещества, и многие скопления азота, серы, железа, марганца, фосфора, кальция и др. возникают при их деятельном участии.

4) Многие микроорганизмы не нуждаются в воздушной среде для своей жизнедеятельности и сами являются источниками тепловой энергии; следовательно, их можно рассматривать, как самостоятельные факторы глиптогенеза и литогенеза, независимые от обычных, непосредственно связанных с солнечной энергией экзогенных процессов в литосфере.

Как на пример минеральных образований, связанных с микроорганизмами, следует указать на латериты, происхождение которых многие авторы связывают с жизнедеятельностью бактерий.[1]

С своей стороны, я сделал попытку установить участие микроорганизмов в возникновении лесса и лессовидных пород. Исполненная по моему почину и под моим руководством работа была опубликована в «Трудах» одного узко-специального института,[2] почему я теперь самым кратким образом воспроизведу еще раз ход моих рассуждений, с некоторыми дополнениями.

Знакомясь с лессами в разных частях нашей обширной страны, я всегда обращал внимание на ту постепенность перехода, которая существует между ними и подстилающими их разнообразными материнскими породами и которая совершенно необъяснима в свете всех гипотез, приписывающих лессу эоловое и водное происхождение и, во всяком случае, рассматривающих его, как некий инородный, извне принесенный и отложенный в данном месте материал.[3] Между тем, постепенность перехода указывает на определенную генетическую связь, существующую между лессами и подстилающими их породами и проявляющуюся, в частности, в том, что последние, при переходе в лесс, утрачивают слоистость, если они ее имели. Обильная литература по этому предмету, принадлежащая многим исследователям (Н. Богослов-

[1] W. Wernadsky. Sur la problème de la décomposition du Kaolin par les organismes. C. R. Acad. Sci. 1922.

[2] Д. В. Соколов, О. С. Виноградова и Г. А. Элькинд. О некоторых новых факторах выветривания горных пород. Тр. Инст. строит. мат., вып. 34, 1930.

[3] Я не касаюсь тех случаев, когда вторично переотложенный различными агентами лесс налегает на всевозможные коренные породы, резко отграничиваясь от них и не имея никакой связи с ними.

ский, И. Леваковский, А. Павлов, Н. Соколов, С. Неуструев, Л. Прасолов, П. Даценко, И. Преображенский, Д. Соколов и др.) и относящаяся к нашему Югу, Поволжью, Черноземной полосе, Западной Сибири, Туркестану и т. д., приведена в цитированном выше моем труде (см. выше прим.). Другой замечательной особенностью лесса является его широкое, зональное распространение на земной поверхности, ибо в обоих полушариях он занимает колоссальные пространства с ландшафтами полупустыни, степи и лесостепи. Эта зональность, соответствующая определенным климатическим зонам недавнего геологического прошлого, указывает на однообразные условия образования этой породы. Правда, еще до последних лет можно было думать, что китайский лесс, мощность которого, со времен Bichthofen, оценивалась сотнями метров, представляет собою какое то исключительное образование, но новейшие труды английских и других геологов, работающих в геологических учреждениях Китая, так сказать, совершенно развенчали китайский лесс.[1] Оказывается, что прежние авторы смешивали под именем лесса породы различного характера и возраста и не учитывали его плащеобразного залегания по высотам и на склонах, почему и получали преувеличенное суждение о его мощности. По данным новейших исследований, мощность китайского лесса лишь в исключительных случаях достигает 80—90 м, а обычно бывает гораздо меньшей, и, что особенно интересно, он сплошь и рядом, постепенно, до полной неуловимости границы, переходит в подлежащие породы.[2] Эти же породы обычно представлены красно-бурыми («red-brown») глинами, явно континентального происхождения, образовавшимися за счет разрушения местных пород и содержащими известковые конкреции, и едва ли нужно говорить, что эти глины до полного тождества напоминают те красно-бурые глины, которые подстилают лессы на обширных пространствах Юга и Юго-Востока нашей страны. К сожалению, я не могу остановиться здесь на многих других результатах, достигнутых работающими в Китае геологами и проливающих свет на время образования как китайского, так и нашего лесса, но и сказанного достаточно, чтобы сделать вывод в том смысле, что китайский лесс ничем существенно не отличается от нашего и есть вполне гомологичное ему образование.

В ряде своих работ, начиная с 1911 г., я писал, что происхождение наших лессов обязано сложным процессам разрушения и преобразования

[1] G. B. Barbour. The Loess Problem of China. The Geolog Magazine, Oktob. 1930. Там же приводится вся новейшая литература.

[2] Это опять-таки не относится к случаям вторичного переотложения китайского лесса разными агентами («redeposited Loess» английских авторов).

различных материнских пород в определенных климатических условиях.[1] Такое же мнение было высказано и подробно обосновано Л. С. Бергом, признающим лесс за ископаемое, нормальное, зональное почвенное образование, сформировавшееся в сухом климате, типа степного или даже пустынного.[2] С другой стороны, замечательные труды ряда почвоведов, особенно нашего академика К. К. Гедройца и немецкого ученого R. Ganssen, позволяют подойти к пониманию тех физико-химических процессов, которые, будучи связаны с выветриванием горных пород в обстановке сухого и полусухого климата, приводят к образованию из них лесса. R. Ganssen устанавливает[3] три типа выветривания алюмосиликатных пород: глинистое, латеритное и гидратное, из коих каждое связано с определенными климатическими условиями. Глинистый тип выветривания свойствен умеренному влажному климату и дает две группы силикатов: очень стойкий, не способный к химическому обмену, коллоидальный каолиновый силикат и сравнительно легко разлагаемый и обменивающий свои основания, коллоидальный цеолитный силикат. Так получаются накопления глинистых масс, способных, благодаря присутствию нестойкого цеолитного силиката, к дальнейшим преобразованиям. В жарком, влажном или полусухом климате, или в жарком климате с чередованием сухих и влажных периодов, цеолитный силикат подвергается разложению с накоплением гидрата окиси алюминия. Это и есть латеритный тип выветривания, при котором в более влажных условиях параллельно накопляется и каолин и образуются каолино-латериты, а в более сухих — каолин не получается. Наконец, в условиях сухого и полусухого климатов теплых и умеренных зон, выветривание протекает по гидратному типу, при чем происходит, главным образом, гидратация алюмосиликатных пород и преимущественное образование коллоидного цеолитного силиката, с сопутствующим появлением щелочных и щелочно-земельных силикатов. Каолиновый силикат, если он при этом возникает, играет подчиненную роль и, связываясь с щелочными или щелочно-земельными силикатами, переходит в цеолитный силикат.

В то время как накопление каолинового силиката при глинистом типе выветривания дает плотно связанные, пластичные глины, гидратный тип

[1] Все ссылки сделаны в моем труде, цитированном в сноске 2 на стр. 699.

[2] Л. С. Берг. Проблема лесса. «Природа», 1927 и 1929 г. См. также его другие, более ранние работы, где, между прочим, приводится и обширная литература.

[3] Entstehung und Herkunft des Löss. Mitt. aus Labor d. Preuss. Geolog. Landesanst. H. 2, 1923. Также: Die klimatischen Bodenbildungen der Tonerdesilikatgesteine. Ibid. H. 4, 1922. В изложении его взглядов я пользуюсь статьями С. С. Неуструева (1925) и Л. С. Берга (1926).

обусловливает свойственный лессам песковатый, рассыпчатый вид получающегося продукта.

Итак, по схеме R. Ganssen, при выветривании алюмосиликатов во влажном климате, щелочные и щелочно-земельные силикаты, а также и карбонаты переходят в раствор и уносятся почвенными водами, на месте же остаются не растворимые в воде коллоидальные цеолитовые и каолиновые силикаты, из коих последние сообщают породе ее глинистые свойства. В сухом климате выноса солей почти не происходит по недостатку влаги, щелочные и щелочно-земельные растворы остаются на месте, создавая щелочную среду, и получаются, главным образом, цеолитные силикаты, в которые превращаются и каолиновые. Недостаток последних и преобладание первых обусловливают рыхлость, рассыпчатость и суглинистость, на ряду с порозностью образующейся породы. Одновременно совершается укрупнение частиц, что R. Ganssen доказал экспериментально, действуя на каолин раствором щелочных силикатов: оказалось, что почти половина каолина превратилась в цеолитные силикаты, при характерном увеличении диаметра частиц и обволакивании их карбонатом кальция. R. Ganssen приводит химическое выражение процессов в обычных формулах, где исходным веществом служит полевой шпат, из которого и выводятся каолиновый и цеолитный силикаты, путем присоединения воды.

В подробностях соображения R. Ganssen и других, работающих в том же направлении ученых, вызывают много возражений и требуют дальнейшей разработки,[1] но, во всяком случае, эти ученые показали, что любая порода, содержащая алюмосиликаты и щелочно-земельные карбонаты и доступная проникновению влаги, может в определенных внешних условиях приобрести облик лесса.

Таким образом, вопрос о происхождении материнской породы отделяется от процесса ее облессования, а потому получают простое объяснение указанные многими авторами случаи постепенного перехода в лесс самых различных материнских пород. Вместе с тем, становится понятной и зональность распределения лесса на земном шаре, для объяснения которой «эолистам» приходилось прибегать к действию гипотетических ветров, не затрудняясь хотя бы, например, тем, что, направляя эти ветры одновременно и из пустынь и из ледниковых областей, они заставляли их отлагать в определенной зоне степей и полупустынь однообразный материал.

[1] См. статью С. С. Неуструева. Почвенная гипотеза лессообразования. «Природа», 1925, № 1—3.

Об участии в процессе облессования биохимических факторов ни R. Ganssen, ни другие исследователи ничего не упоминают, и я должен сказать, что исходная причина этого процесса в свете одних лишь физико-химических воззрений представлялась бы мне непонятной. В самом деле, трудно допустить, что одно лишь незначительное различие в средней годовой температуре и влажности, определяющее сухой, полусухой и влажный климаты умеренных и теплых зон, может обусловить разные типы выветривания горных пород, в физическом и химическом разрушении которых не так важны средние величины, как амплитуды колебаний.

Иное дело, если принять во внимание бактериальное население этих пород, ойкология и био-химические функции которого, как и всего мира организмов, несравненно более связаны со средними метеорологическими показателями, обусловливающими ту или иную климатическую зону.[1] Мы уже знаем, что различные микроорганизмы обладают избирательной способностью по отношению к разным минералам. Знаем, например, что *Bact. extorquens* лучше всего растворяет полевые шпаты. Знаем, что, вообще, легче всего переходят в раствор щелочи и щелочные земли, труднее — кремнезем и глинозем, но что даже стойкое каолиновое ядро разлагается под действием микроорганизмов. Наконец, многие авторы приписывают латеритам биохимическое происхождение. Нельзя не признать, что если говорить хотя бы только о гидратном, лессообразующем выветривании, то требуемое для него разложение алюмосиликатных и, в частности, полевошпатовых минералов в щелочной среде вполне согласуется с этими данными. Возможно даже объяснить преобладание в конечном продукте углекислого кальция и кремнекислоты, которое плохо вяжется с устанавливаемым R. Ganssen господством цеолитных силикатов, как главного результата гидратного выветривания. Впрочем, надо, все же, сказать, что большая теоретическая и экспериментальная работа здесь — еще в будущем.

Учитывая эти данные, я попытался изучить распространение микроорганизмов в более глубоких, чем почва, слоях, с помощью применяемого с недавних пор метода Виноградского-Рихтера. Материалом послужила богатая коллекция, собранная в 1926 г., во время выполнения под моим руководством гидро-геологических исследований в районе горы Магнитной

[1] Я не берусь утверждать, что столь просто организованные существа, как бактерии подчиняются зональности распространения, но можно с значительной долей вероятия предполагать, что климатические зоны отражаются хотя бы на количестве их видов и индивидуумов, а, может быть, и на составе форм: бактерии пустынь едва ли тождественны с бактериями сильно увлажненных стран.

на южном Урале. Теперь там создается новый индустриальный центр, а тогда это была пустая, нераспаханная, ковыльная степь, слегка всхолмленная и полого склоняющаяся к р. Уралу. В основании эта местность сложена однообразными, фиолетово-серыми порфирами и диоритами. Эти кристаллические породы алюмосиликатного типа, со щелочными и щелочно-земельными силикатами в своем составе, в верхних частях выветрены и нередко обращены в каолинизированные или щебневатые массы (сапролиты), порою сохраняющие структуру первоначальной породы. С ними тесно связаны покрывающие их довольно вязкие красноватые и бурые глины, с известковыми конкрециями и гипсом, в свою очередь постепенно переходящие в бурые, карбонатные, довольно грубые, не слоистые лессовидные суглинки, со столбчатой отдельностью, на которых развита черноземная почва. Указанная последовательность образований, равно как и лессовидность их верхней части (метров до 10 от поверхности), были отмечены и до нас[1] и, в общем, все эти наносные накопления представляют собою типичный продукт разрушения местных кристаллических пород, связанный с ними постепенностью перехода и в верхних горизонтах приобретающий лессовидный облик.

В связи с гидрогеологическими изысканиями здесь было заложено много дудок, прошедших через всю толщу наносов до кристаллического основания, и для исследования по методу Виноградского-Рихтера я отобрал образцы из 5 дудок, представляющие полную серию постепенных переходов к кристаллическим породам. Исследование было выполнено в 1928 г. студенткой О. С. Виноградовой, под руководством проф. Е. Е. Успенского, а студент-дипломник Г. А. Элькинд произвел химические анализы исследованного материала. Кроме того, часть последнего была подвергнута механическому анализу по методу Сабанина.[2] Результаты работы приведены в прилагаемой таблице, в которой для сравнения показаны также результаты исследования двух образцов типичного лесса из окрестностей г. Днепропетровска, из коих образец № 3 представляет собою монолит из зоны постепенного перехода лесса в подстилающую его красно-бурую глину.

Оценивая достигнутые результаты, необходимо принять во внимание следующее. Метод Виноградского ценен в том отношении, что он дает возможность установить присутствие бактерий в твердых грунтах и почвах и подсчитать их количество в 1 г изучаемого вещества, но он выделяет их в зафиксированном и окрашенном виде, так что они уже никак не поддаются

[1] А. Н. Заварицкий. Гора Магнитная. Тр. Геол. ком., вып. 122, 1922.

[2] Выполнение всей этой работы было возможно единственно лишь благодаря содействию б. Гос. Института силикатов, ныне Института строительных материалов.

биологическому и биохимическому изучениям, и для этого нужно применять совершенно иные методы.

С этой оговоркой, основные наши выводы таковы.

1) Установлена наличность бактерий в грунтах Магнитогорского района до наибольших, достигнутых разведочными работами глубин (12.5—17.5 м) и, притом, не только в лессовидных продуктах выветривания, но и в самой материнской кристаллической породе. Это факт, несомненно, новый, ибо в литературе указываются гораздо меньшие пределы проникновения бактерий в подпочвенные слои, если не считать приведенных мною выше специфических случаев нахождения бактерий в глубоких угольных и нефтяных, биогенных образованиях.

2) Установлена закономерность проникновения бактерий в грунты, выражающаяся в том, что содержание их в данном слое находится в обратной зависимости от глубины его залегания от дневной поверхности («чем глубже слой, тем бактерий в нем меньше»).

3) Установлено высокое абсолютное количество бактерий в грунтах, а именно: на 1 г исследованного вещества оказалось на наибольшей глубине в 17.5 м — 3 миллиона бактерий, а в 1.5 м от дневной поверхности — это количество возрастает до 18 миллионов. Даже в каолинизированных кристаллических породах (№№ 22—6, 23—6, 34—5, 48—3) содержание бактерий составляет от 1.5 до 4.5 миллионов на 1 г.[1]

4) Установлено полное основание считать, что биохимическая деятельность бактерий, при столь высоком их содержании в грунтах, не может не быть весьма значительной.

5) В химическом отношении установлена некоторая закономерность между количеством бактерий, с одной стороны, и содержанием щелочных земель и железа, с другой стороны. Она выражается в том, что, с углублением в землю, т. е. с переходом в более глинистые разности, и с уменьшением количества бактерий, уменьшается содержание щелочных земель и возрастает содержание железа.

6) Что касается механических свойств нашего материала, то в его составе преобладают либо крупные частицы (> 0.25 мм), представляющие собою обломочки неразложившихся пород, кварцевые зерна и т. п., либо,

[1] Весьма возможно, что указанные цифры содержания бактерий выше тех, которые должны характеризовать истинное количество последних в грунтах in situ, так как бактерии могли размножиться в новых условиях своего существования, после выемки грунтов на поверхность, хотя бы в силу повышения температуры среды; впрочем, это не влияет на установленную закономерность уменьшения их содержания с глубиной.

Сводная таблица результатов бактериологическ

№ анализа	№ образца	Глубина залегания в м	Количество бактерий в млн. на 1 гр	Химичес		
				Пот. при прок.	SiO_2	Fe_2O_3
		С. Вольное бли				
1	2	(Естеств. обнажение)	10.0	6.80	73.75	2.22
		Балка близ Д				
2	3а		11.0	5.90	74.38	4.32
3	3б	(Естеств. обнажение)	10.5	4.90	74.24	5.20
4	3в		10.0	4.70	73.33	3.21
		Близ г. Маг н				
5	22—2	1.5	18.0	—	—	—
	22—2а (низ)	1.7	17.0	6.98	64.24	5.79
6	22—3	8.5	7.0	7.99	63.16	5.78
7	22—4	8.8	6.0	7.74	64.51	5.67
8	22—6	9.3	3.0	1.94	61.68	9.00
9	23—2	1.4	11.0	7.95	61.12	5.45
10	23—4	10.0	7.5	8.02	58.08	7.93
11	23—5	12.0	6.0	6.83	51.77	9.94
12	23—6	12.15	1.5	8.31	58.49	5.59
	33—2	1.4	12.0	—	—	—
13	33—4	4.7	10.0	12.44	54.11	5.40
14	33—5	7.2	4.0	9.04	59.02	5.55
15	33—6	8.7	13.0	9.84	59.48	6.05
16	33—7	12.5	8.5	7.61	61.56	6.27
	33—7а	12.7	8.0	—	—	—
17	33—8	17.5	3.0	9.48	57.63	6.63
	34—2	2.1	11.0	—	—	—
	34—3а (низ)	4.2	10.0	—	—	—
	34—4	4.3	9.0	—	—	—
	34—5	4.6	2.0	—	—	—
	48—2	7.0	7.5	—	—	—
	48—2 (низ)	7.4	7.5	—	—	—
	48—3	8.9	4.5	—	—	—

следования и химического и механического анализов

й анализ			Сумма	Механический анализ			
				I	II	III	IV
Al_2O_3	CaO	MgO		фр. <0.01	фр. 0.01—0.05	фр. 0.05—0.25	>0.25
н е п р о п е т р о в с к а							
6.35	6.85	1.53	99.10	—	—	—	—
п р о п е т р о в с к а							
10.11	3.21	1.74	99.66	—	—	—	—
8.53	5.90	1.69	100.46	—	—	—	—
10.92	4.65	2.18	99.00	—	—	—	—
н о й, н а У р а л е							
—	—	—	—	—	—	—	—
14.50	5.07	2.86	99.44	40.75	7.75	21.0	30.5
14.94	5.38	2.06	99.31	57.75	9.50	27.50	5.25
14.90	5.97	1.65	100.44	36.50	6.25	14.25	43.00
21.61	3.80	1.26	99.39	—	—	—	—
15.29	6.57	3.02	99.40	36.50	7.25	27.75	28.50
21.68	3.22	0.98	99.21	88.00	7.50	3.75	0.75
27.55	2.51	1.52	99.62	25.50	10.00	14.50	50.00
17.56	7.86	1.48	99.29	37.75	19.00	24.50	18.75
—	—	—	—	—	—	—	—
16.93	7.99	2.49	99.36	81.75	8.75	8.00	1.50
17.48	6.46	1.94	99.49	74.75	9.00	13.75	2.50
16.02	5.71	2.65	99.75	68.50	9.50	19.00	3.00
17.65	4.26	2.40	99.75	62.50	8.50	27.50	1.50
—	—	—	—	—	—	—	—
19.16	4.54	2.05	99.51	79.75	9.75	8.00	2.50
—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—

главным образом, мелкие (<0.01 мм), которые можно рассматривать, как еще не успевшие укрупниться в порядке облессования, ибо Магнитогорские лессовидные породы далеко не тождественны с типичным лессом.

Приведенные данные, хотя бы биохимические свойства наших бактерий и оставались пока не изученными, находятся, все же, в соответствии с изложенными выше сведениями о биохимической деятельности микроорганизмов и о типах выветривания горных пород. В самом деле, превращение кристаллических пород через сапролиты в красно-бурые глины вполне соответствует глинистому типу выветривания, с выносом щелочей и щелочных земель и с образованием каолинового (глинистого) и цеолитного силикатов.[1] Биохимическими факторами этого процесса являются бактерии, разлагающие алюмосиликаты, при чем легче всего растворяются щелочи и щелочные земли, а самый процесс протекает в условиях влажного климата умеренных широт. В дальнейшем, с изменением климатических условий в сторону большей сухости, начинается распад каолинового ядра под действием микроорганизмов в щелочной среде, так как выноса щелочных земель более не происходит.[2]

Однако же, до полного преобразования породы в лесс наш процесс не доходит, в силу ли нового увлажнения климата, или других причин, анализировать которые пока еще трудно, по недостатку материала. Во всяком случае, можно думать, что в районе горы Магнитной выветривание первоначально шло по глинистому типу, который позднее сменился гидратным. То же самое наблюдается в Приднепровье, где под лессами лежат красно-бурые глины и каолины, покоящиеся на гранитах и гнейсах.[3]

Таким образом, поставленная мною работа, мне кажется, служит существенным доказательством в пользу того, что бактерии проникают в значительно более глубокие, чем почва, грунты и, следовательно, могут вызывать в них важные явления растворения и перемещения минеральных веществ, до полного преобразования коренных алюмосиликатных пород

[1] Последний, конечно, может быть уловлен лишь более тонким анализом, чем наш, тогда как каолиновый силикат достаточно проявляет себя в характере породы.

[2] В большинстве изученных дудок воды не обнаружено. В остальных она встречена только на дне в ничтожном количестве. Реакция была щелочная.

[3] В 1931 году Б. В. Пясковский (о некоторых образованиях на границе красно-бурых глин с понтическими известняками в восточной части Херсонского округа. Изв. Гл. геол.-разв. упр. L, вып. 48, 1931), изучая оригинальные известковистые и марганцево-железистые образования, свойственные пограничной зоне между названными отложениями, высказывается о красно-бурых глинах в том смысле, что они произошли из местных пород in situ «под влиянием процессов выветривания и почвообразования»; однако, в этой статье автор не пытается углубиться в сущность указанных процессов.

в глины и лессовидные суглинки. Иначе говоря, биохимическое выветривание не ограничивается тонкой пленкой почв, но идет на гораздо больших глубинах, вызывая появление мощных новообразований — латериты, каолины, лессовидные породы и др.

Учитывая значение лессовидных пород в литосфере и своеобразие условий, в которых протекает процесс их образования, я вновь выдвигаю для него термин облессование, впервые примененный покойным С. С. Неуструевым, способ же происхождения их называю метаморфным, имея в виду роль глубокого биохимического превращения коренных пород и противополагая этот способ эоловому, делювиальному и другим, в которых речь идет о накоплении лесса, а не о превращении в него материнских пород.[1]

Вместе с тем, вопрос о выветривании, вообще, получает новую постановку, поскольку микроорганизмы имеют огромное распространение на поверхности литосферы и, как мы убедились, проникают даже и в глубины. До сих пор еще геологические руководства, как русские, так и иностранные, трактуют, главным образом, о физическом и химическом выветривании, о биологическом же, если и упоминают, то, преимущественно, лишь в отношении почвообразования. Между тем, правильнее, видимо, говорить о едином процессе выветривания, в котором физические, минерально-химические и био-химические факторы идут рука об руку, и неизвестно еще, какому из них в каждом отдельном случае принадлежит решающая роль.

В частности, надо думать, что физическое и химическое выветривания в своем чистом, вполне изолированном виде встречаются в верхних частях литосферы очень редко, ибо жизнедеятельные бактерии пользуются в них повсеместным распространением.[2] В свете этих соображений, следовало бы пересмотреть и столь широко применяемое понятие «делювий», которое геологи обычно связывают с представлением о механическом раздроблении пород и переотложении их по склонам.

Между тем, если ввести сюда биохимические факторы глубокого внутреннего преобразования их при участии микроорганизмов, то сразу станут

[1] Как известно, Л. С. Берг выдвинул почвенную гипотезу происхождения лесса, считая, что оно, по существу, тождественно с процессом образования почвы. В моей цитированной выше работе я высказал те соображения, по которым термин почвенное происхождение кажется мне неудовлетворительным.

[2] В. Л. Омелянский в цитированной выше работе (см. выше прим. на стр. 697) указывает, на основании литературных данных, что микроорганизмы с чисто минеральным типом питания (так называемые прототрофы) были найдены на больших высотах Альп, в отсутствии более высоко организованной жизни. После извержения Кракатау, уничтожившего все живое, пионерами жизни явились на этом острове прототрофные сине-зеленые водоросли.

понятными те необъяснимые одним механическим разрушением явления, как постепенные переходы лессовидных суглинистых накоплений на склонах в столь несходные породы, как известняки и мел, с одной стороны, и кремнистые породы, с другой, примеры чего указаны многими авторами, во главе с основоположником учения о делювии, покойным акад. А. П. Павловым.

Так же я представляю себе и происхождение так называемых «покровных суглинков», широко распространенных у нас на моренных глинах вне занятых лессом пространств; эти суглинки обычно переходят в морену постепенно и замечательны, между прочим, тем, что находящиеся в них валуны кристаллических алюмосиликатных пород часто совершенно разрушены выветриванием, тогда как кремнеземные валуны кварцевых песчаников сравнительно свежи.

Наконец, и в области гидрогеологии некоторые вопросы должны быть пересмотрены под новым углом зрения. Свойство микроорганизмов выделять кислоты должно быть учтено в проблемах химии подземных вод и, надо думать, что многие наблюдаемые на практике особенности их состава, не всегда понятные при условии простого выщелачивания водопроводящих пород, найдут правильное объяснение. В частности, это, на мой взгляд, относится к соединениям азота, которые обычно встречаются в составе грунтовых и напорных вод, но которые часто нельзя связать ни с органическим загрязнением, ни, тем более, с выщелачиванием из проходимых водою напластований.

Вообще, химизм подземных вод получит существенно иное освещение, если принять во внимание способность микроорганизмов к избирательному растворению породообразующих минералов и к образованию как щелочной, так и кислой сред. Кроме того, надлежит еще изучить подземные воды, как способ, посредством которого бактерии проникают в подпочвенные слои, ибо другой путь их проникновения трудно представить, если только не считать их или их предков современниками отложения содержащих их пород, что, впрочем, теоретически вполне возможно. При этом, во многих случаях главная роль в переносе микроорганизмов принадлежит, видимо, не оформленным потокам, но, скорее, капиллярным путям медленного движения влаги. По крайней мере, в сухих климатических зонах, где так развиты лессовидные породы, осадков мало, а грунтовые воды очень скудны и лежат глубоко и значительную часть года действует скорее капиллярное перемещение влаги.

Весьма вероятно также, что бактерии, способные, как показал Bassalik, обволакивать своим коллоидальным веществом частицы пород, влияют и на водопроводимость последних.

К моему большому сожалению, мне пока не удалось продолжить начатую работу над изучением биохимических факторов выветривания в более глубоких, чем почва, грунтах. Вместо случайно оказавшегося у меня Магнитогорского материала, мне хотелось поставить специальное исследование определенных геологических разрезов, для чего весьма подходящей представлялась серия пород: лесс — красно-бурая глина — сапролиты — гранито-гнейсы — в области порожистого Приднепровья, и, притом, не только установить наличие микроорганизмов в зафиксированном виде, но и изучить их биологически и биохимически, путем выделения культур и дальнейших опытов. Однако же, тот институт довольно узкой специальности, где я поставил описанную выше работу, не признал дальнейшее развитие ее действенным, и я мог применить свои мысли лишь к частному случаю, а именно, к изучению причин, вызывающих разрушение памятников старины. Не имея возможности войти здесь в подробности этой проблемы, я кратко укажу лишь, что древние каменные памятники, хранящиеся в музеях, сплошь и рядом обнаруживают стремительную склонность к разрушению, несмотря на все заботы о них. Это случилось и с некоторыми древнеегипетскими памятниками в Московском музее изящных искусств. В борьбе с подобными явлениями обычно применяют изоляцию памятника разными способами от окружающей среды в предположении, что последняя и является причиной его разрушения, но мне казалось, что если эта причина гнездится в самом памятнике, в виде его разнообразного бактериального населения, то борьба методом изоляции от среды может быть уподоблена лечению глубокой раны антисептическими перевязками, без обеззараживания самой раны.

Применяя эту мысль к памятникам Московского музея, Н. С. Мануйлова установила по способу Виноградского-Рихтера наличие в них микроорганизмов, а затем выделила и изучила культуры этого населения, обнаружившие определенную биохимическую активность. Таким образом, в практической части задача казалась решенной удовлетворительно, но я не мог использовать эти данные для решения основной проблемы о биохимических факторах выветривания литосферы, хотя бы потому, что самый крупный образец, бывший в нашем распоряжении, имел всего около 10 см толщины и не давал права к каким-либо обобщениям по отношению к подпочвенным слоям.

Таким образом, заканчивая настоящую статью, я должен выразить горячее пожелание, чтобы работа по изучению биохимических факторов выветривания и влияния их на химизм подземных вод была продолжена при

содействии такого института, который мог бы по достоинству оценить ее теоретическое значение и учесть, что успешное развитие ее возможно лишь при согласованном участии представителей разных научных дисциплин, поскольку здесь соприкасаются проблемы геологии, минералогии, гидрогеологии, микробиологии, гидрохимии и др.

Москва, 1931—1932.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

О ЖИЛКОВАНИИ КРЫЛЬЕВ СТРЕКОЗ И ПОДЕНОК И ИХ ФИЛОГЕНЕТИЧЕСКОМ РАЗВИТИИ

Ю. М. ЗАЛЕССКОГО

(Представлено академиком В. Л. Комаровым)

Plus un insecte a une haute antiquité géologique plus la nervation de ses ailes est complète; plus un insecte est d'apparition récente, plus sa nervation s'est simplifiée.
Charles Brongniart.

В связи с нахождением крыла пермского стрекозоподобного насекомого *Pholidoptilon camense*, описанного мною в прошлом году (21,22), у меня возникли некоторые соображения относительно понимания и толкования жилкования крыльев стрекоз и поденок, а также их филогенетического родства и эволюции. Эти соображения я и излагаю в настоящей статье.

Уже давно многие исследователи пытались сравнить и увязать жилкование родственных групп стрекоз и поденок, подходя к этому вопросу то беря за основу метод изучения онтогении трахеации у нимф, как, например: Комсток, Нидхэм и Анна Морган, то преимущественно пользуясь данными, доставляемыми исследованием ископаемых форм, как Гандлирш и Мартынов.

Первыми занявшимися толкованием жилкования крыльев стрекоз и поденок были Комсток и Нидхэм (4). Согласно их толкованию, жилкование крыльев стрекоз сильно отличалось от жилкования крыльев таких близких насекомых, как поденки. Дело в том, что стрекозы имеют особую жилку, рассматриваемую как сектор радиуса (RS), которая как бы пересекает и заходит за ряд других жилок, которые у стрекоз Комстоком и Нидхэмом, а впоследствии и Гандлиршем (7) и большинством одонатологов считались за ветвления медианы; у поденок же такового пересечения жилок не имеется, а жилки, соответствующие по положению медиане стрекоз, рассматрива-

ются у поденок как многочисленные секторы радиуса. Редтенбахер (14) указывал на сходство в жилковании и чередовании выпуклостей и вогнутостей крыла (верхних и нижних жилок) у стрекоз и поденок, но Комсток и Нидхэм не придали этому значения. Первой, по моему мнению, совершенно правильно осветившей жилкование поденок, была исследовательница Анна Морган (12). Она считает, что та сложная жилка, которую Комсток и Нидхэм обозначают как RS, есть на самом деле медианная. Против мнения Анны Морган и вообще с критикой метода изучения онтогении трахеации Комстока и Нидхэма, которым пользовалась и Морган, категорически выступил А. В. Мартынов (10). Он ошибочно, как мы увидим ниже из сравнения с недавно найденным отпечатком крыла *Pholidoptilon camense*, рассматривает медианные Комстока и Нидхэма у стрекоз как многочисленные секторы радиуса и отождествляет их с секторами радиуса у поденок. Последнее А. В. Мартынов, повидимому, принимает потому, что ищет у современных поденок SR, сравнивая его с таковым у ископаемых *Protoephemeroidea (Triplosoba)* через посредство которых он старается установить филогенетическую связь современных *Ephemeroptera* (*Agnatha*) с наиболее примитивными *Palaeodictyoptera* (*Dictyoneuridae*). По моему, нет никакой надобности искать у современных стрекоз и поденок SR, отвечающий таковому *Palaeodictyoptera*. Филогенетическая связь поденок и стрекоз с *Palaeodictyoptera* ясна и без стремления найти у первых двух отрядов жилку, отвечающую SR *Palaeodictyoptera*. Ниже я еще остановлюсь на этом вопросе.

Почти одновременно с Мартыновым за подобное представление о SR стрекоз высказался и Лемеер (9), точку зрения которого принял и Тиллиард в 1928 г. (15, 16), хотя раньше, как это видно из его предыдущих работ (17, 18, 19), он разделял точку зрения Комстока, Нидхэма и Гандлирша и даже в одной статье (20) в отношении *Zygoptera* развивал особую теорию неветвистого радиуса. Здесь отмечу, что я не могу вообще согласиться с мнением Лемеера, что все нижние жилки — секторы выпуклых; особенно это сомнительно в отношении косты и субкосты.

В своей более поздней сводке о крыльях насекомых Комсток (5) уже соглашается с Анной Морган и принимает ее толкование жилкования крыльев поденок. А. В. Мартынов, касаясь этого в той же статье (10, стр. 147), говорит (цитирую дословно): «Путем такого толкования жилкование поденок было до известной степени подведено под схему жилкования стрекоз, но тем самым оно оказалось чрезвычайно далеким от жилкования *Palaeodictyoptera* и даже карбоновых поденок *Triplosobidae* Handl.» Совершенно

верно, что благодаря этому жилкование *Palaeodictyoptera* становится более отдаленным, но почему это должно служить опровержением? Просто напросто видимо *Palaeodictyoptera* и *Triplosobidae* стоят в действительности гораздо дальше от поденок, чем считает это А. В. Мартынов. Да за это уже говорит и другой факт, отмечаемый самим А. В. Мартыновым (стр. 150 и 151), что у *Palaeodictyoptera*, у *Triplosoba* и пермских поденок крылья гомономны, а у современных поденок сильно отличаются различием передних от задних.

Уже давно внимание исследователей было остановлено на факте наличия у насекомых верхних (concave) и нижних (convex) жилок, лежащих то на вершине выпуклости крыла, то на дне впадины. Адольф (1) развил даже на этом основании совершенно особый взгляд на происхождение верхних и нижних жилок. Затем большое значение отличию верхних и нижних жилок придал Редтенбахер (14), а затем и Броньяр (3). Суммируя вкратце взгляды этих авторов, можно сказать так: жилки всех насекомых разделяются по своему положению на вершине складки крыла или в глубине впадины на жилки верхние (convex, haute) и нижние (concave, basse). Расположение это строго определенно для каждой данной жилки: так, например, C — всегда жилка верхняя, Sc — нижняя, R — верхняя и т. д., и распределение верхних и нижних жилок большею частью чередуется. Крыло с полным количеством жилок и их расположение можно изобразить наглядно в следующей таблице, где буквы обозначают название каждой жилки, а цифры нечетные ее положение на вершине складки, четные же положение ее во впадине.

C — I
Sc — II
R — III
» — IV
M — V
» — VI
Cu — VII
A_1 — VIII
A_2 — IX

и при сильном развитии анального поля:

A_3 — X
A_4 — XI и т. д.

Надо сказать, что многие авторы при рассмотрении жилкования считаются отчасти с положением данной жилки, как верхней или нижней, или даже иногда пользуются этим, как критерием для определения жилки. Но все же, к сожалению, большинство их не дооценивает важности этого различия и не пользуется широко этим ключом для распознавания жилок, данным самой природой.

В нижеследующих рассуждениях и выводах, сделанных мною, я широко воспользовался и положил в основу эту классификацию выпуклых и вогнутых жилок, а также учел законность, подмеченную Броньяром (3) и выраженную им в правиле: «Plus un insecte a une haute antiquité géologique, plus la nervation de ses ailes est complète, plus un insecte est d'apparition récente, plus sa nervation s'est simplifiée» (стр. 117).

Это правило я и беру эпиграфом к настоящей статье.

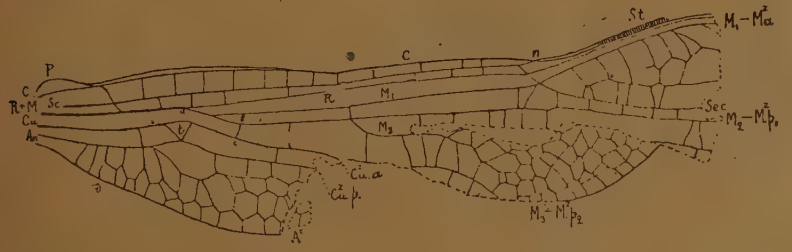
Как наблюдалось, при упрощении жилкования чаще всего исчезают IV и VI жилки и иногда частью или совершенно V, остальные более постоянны.

Редтенбахер и Броньяр не называли никак эти часто подверженные редукции жилки IV и VI; Комсток называл их praemedia и postmedia, я же здесь даю им названия: mediana anterior — M.a. и cubitus anterior Cu.a.; соответственно этому V — медианная жилка и VII — кубитальная будут с приставками posterior (M.p. и Cu.p.). Эта номенклатура вовсе не соответствует прежней номенклатуре авторов — M_1 M_2 и Cu_1 Cu_2, а равным образом и отличается от терминологии CuA и CuP, употребляемой А. В. Мартыновым, так как собственно говоря это совершенно две самостоятельные жилки и они могут иметь общее основание (сросшееся), а могут и не иметь его, и не являются передней и задней ветвью одной первичной Cu (VII) жилки. Каждая из этих жилок может иметь свои второстепенные веточки, которые я обозначаю номерами с соответствующим названием, например, $Cu.a._1$ и $Cu.a._2$.[1] Кроме того, я обозначаю каждую верхнюю жилку знаком +, а каждую нижнюю знаком —, так как пользуюсь преимущественно буквенным обозначением. Таким образом вышеприведенная табличка будет выглядеть так:

[1] Возможно, было бы более целесообразным, во избежание смешения моей номенклатуры с прежней, дать совершенно новые названия IV и VI жилкам, как это сделано было Комстоком, но его названия мне кажутся неудобными, и я потому предлагаю назвать IV жилку — antemediana, а VI — antecubitus. Я не даю этих названий этим жилкам теперь же, в настоящей статье, потому что для этого надо детально проверить, насколько эти названия будут удобны в отношении других отрядов насекомых.

P —	0 —	имеющаяся только у *Permodonata*
C —	I +	
Sc —	II —	
R —	III +	
M. a. —	IV —	
M. p. —	V +	
Cu a —	VI —	
Cu p —	VII +	
A_1 —	VIII —	
A_2 —	IX +	

Теперь перейдем к рассмотрению жилкования *Pholidoptilon camense* и тем выводам, которые проливают свет на отождествление жилкования крыльев поденок и стрекоз и подтверждают мнение Анны Морган в отношении первых и Комстока и Нидхэма с их последователями в отношении вторых.



Фиг. 1. Переднее крыло. *Pholidoptilon camense* G. Zalessky. Обозначения, лишенные показателя Z, — мои прежние обозначения, снабженные же показателем Z — моя нынешняя номенклатура. n — узелок. abc — гомолог дужки.

Здесь я не стану давать подробного описания жилкования крыла *Pholidoptilon*, что мною уже сделано в специальной статье (21,22), а прошу читателя прямо обратиться к моему рисунку (фиг. 1). Отмечу здесь только то, что со времени выхода из печати упомянутой статьи я изменил сильно взгляд на последнюю жилку, обозначенную как An, и считаю ее Cu.p., так как она является верхней жилкой и не может быть A_1—VIII, а An вижу в жилке, бегущей по заднему краю крыла (см. ниже). Равным образом M_1 соответствует M. a., M_2 и M_3 являются двумя ветвями M.p. Эти изменения представлены на схематической реставрации крыла *Permodonata* на фиг. 5, а также на фиг. 1, с показателем Z над обозначениями.

Переднее ветвление медианной, отходящей от общего ствола с R у *Pholidoptilon*, при внимательном рассмотрении не может быть рассматриваемо как SR, как это нужно было бы, если придерживаться взглядов Лемеера и А. В. Мартынова. Прежде всего эта первая жилка M_1 является нижней жилкой (М.а.), а от нее уже отходит вторая общая ветвь (М.р.) распадающаяся затем на две M_2 (М.$р_1$) и M_3 (М.$р._2$), которая уже должна соответствовать настоящей М, т. е. V жилке и по А. В. Мартынову и по Лемееру. Но тогда приходится допустить, что медианная ответвляется от SR, что мне кажется абсолютно невероятным и невозможным.

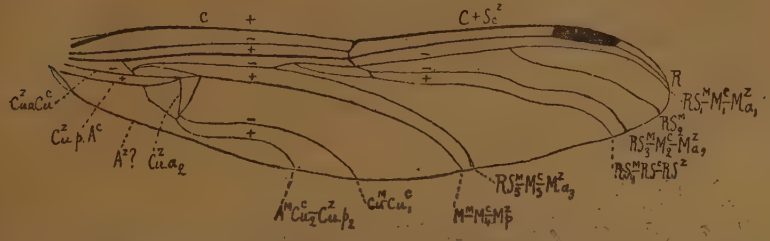
Мне кажется, что характер этих двух жилок у *Pholidoptilon*, отвечающих секторам дужки современных стрекоз, настолько ясно говорит за то, что это две медианные, т. е. М. а.—IV и М.р.—V, а не RS и М.Р. Мартынова, что толкование Комстока и Нидхэма в отношении их у современных *Odonata* нужно признать совершенно правильным.

А. В. Мартынов (10) говорит, что RS отходит от М; то же он видит и у *Triplosoba* (стр. 152). В своей недавней работе о пермской стрекозе *Permaeschna dolloi* Martynov (11), А. В. Мартынов, реставрируя несохранившуюся часть крыла, ответвляет медианную от SR и в свою очередь CuA от медианной, а CuP совсем отдельно, самостоятельно. Надо отметить здесь, что, поступая так странно, А. В. Мартынов реставрирует основную часть крыла замечательно верно и предугадывает как бы расположение жилок, позднее обнаруженное у *Pholidoptilon*. *Permaeschna* несомненно имеет много сходства с *Pholidoptilon*, но конечно на основании того неполного отпечатка, который имел А. В. Мартынов, не может быть отнесено к отряду *Permodonata* и совершенно правильно, по моему мнению, выделено в самостоятельный подотряд стрекоз *Protanisoptera*.

Хотя не исключена возможность, что если бы сохранилась основная часть крыла и на ней оказались характерные для *Pholidoptilon* особенности жилкования, то *Permaeschna* оказалась бы просто задним крылом какого-нибудь другого рода из отряда *Permodonata*.

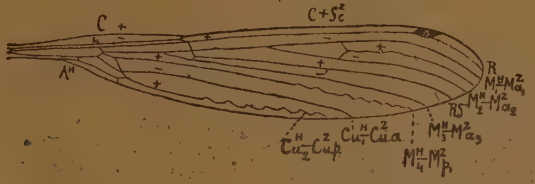
Броньяр (3) IV, V, VI и VII жилки у стрекоз видит совершенно в других жилках, чем это толкуется мною. За IV жилку принимается им только часть ее, соответствующая второй ветви IV — М.а. моей номенклатуры, а первую ветвь медианы антериор (М.$а._1$) он именует VI жилкой. Сектор радиуса Комстока и Нидхэма он рассматривает как V жилку. Соответственно этому моя V — медиана постериор рассматривается им как VII жилка, а благодаря этому, конечно, следующие жилки, рассматриваемые мною как VI и VII, называются у него анальными VIII и IX. С таким

толкованием Броньяра я никак не могу согласиться; в случае стрекоз он сильно ошибался и отчасти, конечно, потому, что ему не могло быть известно исследование Комстока и Нидхэма, доказывающее, что его V жилка снабжается трахеей от R и таким образом является SR.



Фиг. 2. Переднее крыло *Libellula quadrimaculata* L. Изображены только главные, продольные жилки.

Что касается следующих за медианными жилок, кубитальных и анальных, то я их у стрекоз, как современных так и ископаемых, рассматриваю иначе, чем рассматривалось это прежними авторами. Из прилагаемых рисунков (фиг. 2 и 3), где даны обозначения жилок по всем авторам,[1] видно, что Ком-

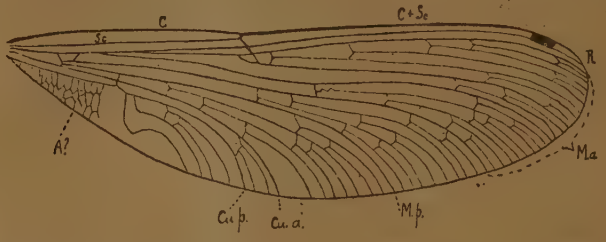


Фиг. 3. Переднее крыло *Lestes* sp. Изображены только главные жилки.

сток и Нидхэм, а также Гандлирш считают VI жилку за Cu, а секторы треугольника за Cu_1 и Cu_2, анальная же по их мнению сохранилась только в основной части и оканчивается у треугольника, давая вниз сеточку жилок, развитую главным образом в задних крыльях. По Мартынову выходит, что VI жилка будет Cu так же, как и первый сектор треугольника, но последний без обозначения на рисунке, какой собственно кубитус, но, судя по тексту его статьи (см. стр. 159 и 160 русского перевода), выходит, что это CuP

[1] Обозначения даны с показателями над каждой буквой, обозначающими авторов. Показатель H означает — по Гандлиршу, показатель C — по Комстоку и Нидхэму, M — по Мартынову и с показателем Z — мои обозначения. Буквами без показателей обозначены жилки, рассматриваемые всеми авторами одинаково.

(cubitus posterior Мартынова), а VII жилка плюс второй сектор треугольника, по А. В. Мартынову, является А (без обозначения, какая А). По поводу СА Мартынов говорит следующее (цитирую стр. 160): «Мне представляется не невероятной мысль, что верхняя сторона (подразумевается сторона треугольника) у некоторых групп могла быть остатком начальной Cu_1. Cu_1, как у поденок, должен был быть вогнутым, и как раз жилка эта является вогнутой, переходя на конце в резко выпуклую М». Далее А. В. Мартынов говорит: «На предположении этом я, однако, не настаиваю, так как иных определенных фактических доказательств не нахожу».



Фиг. 4. Переднее крыло *Calopteryx* вр. ♀. Изображены только главные жилки, вставочные продольные и участок сеточки анальной области.

Если не настаивает на этом А. В. Мартынов, то за это более смело высказываюсь я, хотя надо сказать, что в Cu_1 я вижу вполне самостоятельную жилку, а не ветвь общего ствола кубитуса. Эта отдельная жилка, по счету VI и обозначаемая мною как Cu.a. (кубитус антериор), имеет свои две ветви Cu. a_1 и Cu. a_2; первая из них у *Odonata* сохраняется в виде верхней стороны треугольника, а вторая в виде его внутренней стороны, обращенной к характерной подтреугольниковой ячейке. $Cu._2$ или cubitus posterior я вижу в следующей VII жилке. Секторы треугольника, во всяком случае задний сектор, я склонен рассматривать как производные VII жилки, а А вижу в заднекраевой жилке, бегущей по заднему краю крыла, хотя, как объясню ниже, я в этом не совсем уверен.

Чтобы объяснить, что дает мне повод так толковать эти жилки, мне необходимо будет здесь остановиться подробнее на филогенетической эволюции стрекоз и тех изменениях во взглядах на нее, на которые меня натолкнула находка *Pholidoptilon camense*. Специально вопросом об эволюции *Odonata* детально занимался Тиллиард. В его очень интересной работе, специально посвященной этому вопросу (15), он высказывается определенно за происхождение *Odonata* от *Megasecoptera*, а не *Palaeodictyoptera*, как это мыслилось раньше. Действительно, узкое стебельчатое основание крыла

Megasecoptera, напоминающее таковое у стрекоз, особенно у *Zygoptera*, сильно соблазняет попытаться найти тут родство, но резкая простота жилкования и его только очень относительное сходство, мне кажется, говорят против того, что от такого уже достаточно специализировавшегося отряда, как *Megasecoptera*, могли произойти стрекозы с их сложным, а потому более примитивным и архаичным жилкованием. Несомненно, корни филогенетического дерева, давшего современных *Odonata*, надо искать среди наиболее архаичного и давшего вообще, повидимому, начало многим отрядам отряда *Palaeodictyoptera*. Как уже указывалось выше, Мартынов высказывался за то, что ближайшими родственниками среди *Palaeodictyoptera* будут представители сем. *Dyctioneuridae*. Мне кажется слишком преждевременным строго фиксировать семейство, которое могло бы быть родоначальником предков стрекоз; я, на основании сопоставлений с *Pholidoptilon camense*, считаемым мною прямым предком стрекоз, склонен думать, что предков стрекозоподобных насекомых нужно искать скорее в группе тех *Palaeodictyoptera*, которые Броньяром (3) объединяются в сем. *Platypteridae* подсем. *Lamproptilida*, а Гандлиршем рассматриваются как два семейства *Homoiopteridae* и *Spilapteridae*. Поэтому, изображая (фиг. 5) гипотетического праотца, давшего начало стрекозоподобным насекомым, я и беру за прототипы роды *Homoioptera Woodwardi* Brongn. и *Becquerelia superba* Brongn. (см. Броньяр, табл. XXXVI (20) фиг. 1 и 10 и Гандлирш, табл. XI, фиг. 1 и 22).

Читатель может обратить внимание на несоответствие в толковании жилок на моем рисунке и у Броньяра для двух только что упомянутых форм. Дело в том, что у этого автора все жилки, кроме Sc, обозначены нечетными числами, т. е. почти все жилки крыла являются верхними, нижние же жилки исчезли. Мне кажется, это сильно противоречит вышеприведенному правилу Броньяра, и у такой древней группы не могли исчезнуть почти все нижние жилки. Просто-напросто гофрировка крыла была не столь совершенна, и нижние и верхние жилки на отпечатке вероятно мало отличаются друг от друга и кажутся все верхними. К сожалению, это только предположение с моей стороны, так как для этого нужно бы было иметь в руках оригинал. Все-таки на основании этого предположения я считаю, что мы здесь имеем также и еще недифференцированные нижние жилки, соответственно чему я их и обозначаю на своем гипотетическом крыле *Palaeodictyoptera*, давшем начало группам одонатовых и агнатовых насекомых.

Изображая на прилагаемой схеме гипотетическое крыло, следующее за первым, я не хочу дать этим изображением воссоздания действительно

существовавшего предка, а только хочу показать одну из фаз тех изменений, совершавшихся в процессе эволюции, которые я себе рисую, а также хочу дать понять, что где то среди подобных фаз на пути эволюции я и нахожу общий ствол трех ветвей: *Protodonata*, *Permodonata* и *Ephemeroptera*.

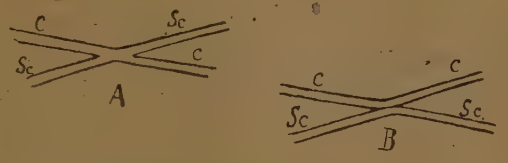
Прошу читателя обратиться к моей схеме (фиг. 5). Как видно из моего рисунка, у *Palaeodictyoptera* сем. *Platypteridae* я нахожу все жилки крыла имеющимися налицо, и каждая из них сильно развита и имеет свои второстепенные ветви; IV и V жилки имеют одно общее основание, тогда как VI и VII отходят отдельно.

Следующей фазой я хочу дать понять, что эволюция пошла по пути редукции RS и увеличения за счет обслуживаемой им площади M. a., т. е. IV жилки и некоторого уменьшения в числе и взаимного слияния анальных. Имевшийся у *Palaeodictyoptera* крыловидный придаток (P) переднегруди (pleurae) срастается с передним краем крыла и от него тянется прекостальное поле. Срастание это я себе рисую в таком духе, как это происходит иногда и теперь среди современных бабочек, когда передние крылья у них аномально срастаются с задними (8). На этом этапе эволюция пошла по двум разным путям; один дал начало агнатоподобным насекомым, другой — одонатоподобным. Рассмотрим из них сначала последний. Редукция SR стала еще большей и в конечном результате приводит большею частью даже к полному исчезновению его. Прекостальное поле сохраняется, сохраняется также и прекостальный выступ, получившийся от срастания придатка переднегруди (P). Общий ствол медианных подходит близко к R. Cu. a.—VI и Cu. p.—VII жилки упрощаются, и ветви их полностью или только частью редуцируются. Затем пути эволюции опять расходятся, приводя с одной стороны к *Protodonata*, а с другой к *Permodonata*. У первых утрачен прекостальный выступ, M.a. и M.p. имеют тенденцию совершенно слиться в основной части с R, а сами относительно сильно развиты. Cu. a. и Cu. p. уже представлены в виде двух простых параллельно идущих жилок. Cu. p. в основной части сливается с VIII — анальной жилкой, так что последняя кажется его ветвью (An).[1]

У *Permodonata* мы видим сохранившимся и прекостальный выступ, ограниченный характерной жилкой — P (praecosta), пересекающей C и Sc. Коста и субкоста в месте образования, давшего впоследствии узелок стрекоз, пересекаются и, идя затем на близком расстоянии друг от друга, заключают между собою шероховатую пластинку, отвечающую птеростигме. Я не стану

[1] На схеме взята фаза, соответствующая *Meganeura monyi* Brogn.

настаивать на том, что здесь мы имеем дело с настоящим пересечением C и Sc в таком виде, как это изображено на схеме A, фиг. 7. Очень возможно, что мы тут имеем дело с ложным, кажущимся пересечением, когда обе эти жилки подошли сначала близко одна к другой до полного контакта, а затем немного разошлись (схема B), но морфологически, судя по отпечатку, мне кажется, возможно рассматривать это образование как пересечение. Радиус (R) здесь простой, так как сектор (Sec), выходящий из подузелка, является нижней жилкой и вероятно будет или ветвью M. a., или же сектором Sc. Обе медианные отходят общим стволом с радиусом (R + M) и в своей основной части соединены поперечной жилкой с Cu. a. — VI, образуя зачаток дужки современных стрекоз. Cu. a. имеет одну полную, вполне развитую переднюю ветвь и вторую укороченную, упирающуюся в Cu. p. — VII и образующую левую сторону треугольника. Верхняя сторона треугольника образована передней ветвью C. a., а с правой или внешней части он ограничен наискось направленной особой поперечной жилкой. Отсюда понятно, что я совершенно не могу согласиться с представлением Нидхэма (13), что верхняя сторона треугольника образовалась из поперечной между Cu и M путем наклона наружу. Cu. p. сохранил свою вторую ветвь в виде выпуклой веточки d. Между первою и второю веточками Cu. p. имеется вставочная вогнутая жилка i, отходящая от внешней стороны характерной ячеи, расположенной между этими веточками Cu. p.



Фиг. 7. Схемы возможного перекрестка косты с субкостой. A — действительный перекрест. B — ложный, лишь морфологический перекрест.

Анальная жилка, как я предполагаю, представлена заднекраевой жилкой, бегущей по краю крыла. Основанием такого толкования мне послужило изображение крыла нимфы стрекозы, представленное у Броньяра на табл. XXIV (8), фиг. I (3), где имеется трахея, идущая вдоль заднего края крыла, но никак не названная Броньяром. На других изображениях трахеации нимф, правда, очень схематичных, представленных у Комстока и Нидхема и у Гандлирша, подобной трахеи нигде не изображено. Таким образом, существует ли она? Вот почему, как я указывал выше, я не вполне уверен, что заднекраевую жилку можно считать за A, или VIII жилку; является ли она трахеальной? Следовало бы проверить это самому, просмотрев жилкование нимф стрекоз, но обстоятельства не поз-

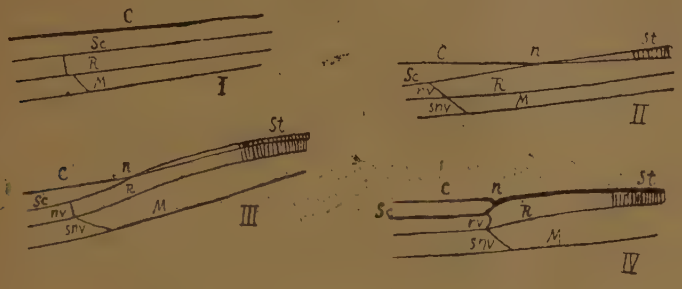
волили мне выполнить это теперь же. Но если заднекраевую жилку не считать за A, то тогда только можно предположить, что она просто-напросто слилась совершенно с Cu. p. и что процесс ее слияния, констатируемый у *Protodonata*, у ветви *Permodonata* закончился совершенно, приведя к полной редукции анальных жилок у *Odonata* в переднем крыле и частично в заднем.

Отвергая точку зрения Тиллиарда о происхождении стрекоз от *Megasecoptera* через посредство гипотетической *Protokennedya*, связывающей их с *Zygoptera*, я также не соглашаюсь с его мнением о происхождении *Anisoptera* от *Zygoptera*. В этом отношении я совершенно согласен с мнением А. В. Мартынова, высказанным в статье о *Permaeschna dolloi* Martynov (11), что такое толкование противоречит закону Долло и что более сложные, полные и, следовательно, более примитивные по жилкованию *Anisoptera* не могли произойти от упростившихся *Zygoptera*.

Из прилагаемой мною схемы (фиг. 6), изображающей эволюцию подотрядов стрекоз, шедшую постепенно от общих предков в виде отряда *Permodonata*, можно наглядно судить о моем представлении на этот счет. В своей схеме я изображаю только участок основной части крыла, потому что главные изменения в жилковании происходили именно в этой части крыла, тогда как все крыло в остальном сохранило общий для стрекоз тип жилкования. Этим рядом фаз я также не хочу изображать гипотетические формы, через которые шла эволюция, я только хочу указать наглядно путь этой эволюции и следовательно какое-нибудь изменение, изображенное у меня на одной фазе, могло произойти гораздо раньше или позже, чем это изображено у меня, и таким образом могло соответствовать другой фазе.

В первой ветви *Permodonata*, давшей *Anisoptera*, происходили следующие изменения. Дужка принимает более характерную для нее форму. M. p. направляется резко книзу. Cu. a. своей передней ветвью упирается в M. p., хотя возможно, что первое время он здесь еще существовал отклоненным по направлению, изображенному у меня на I фазе пунктиром. Cu. p., вначале еще идущий двумя ветвями своими книзу, как у *Permodonata*, впоследствии заворачивается постепенно своей передней ветвью вверх и в окончательной фазе IV, изображающей современную стрекозу, подходит, упираясь во внешний угол треугольника, у Cu. a. Вторая ветвь Cu. p., обозначенная на схеме буквой d, почти сохраняет в основном свое прежнее направление и только соответственно всем остальным изменениям подымается основанием несколько выше к треугольнику, вследствие чего вставочная жилка i приходит в контакт с задним углом треугольника. Таким

образом я рисую себе образование двух секторов треугольника. Но крупным возражением против моей гипотозы является тот факт, что, судя по изображениям трахеации у нимф Комстока, Нидхэма, Броньяра и других, оба эти сектора получают свою трахею в виде двух ветвей от трахей Cu. a. В таком случае можно допустить, что жилка i в последней окончательной IV фазе является логичным продолжением второй ветви Cu. a., образующей левую сторону треугольника продолжением, которое развилось вторично, заместив собою исчезнувший конец первой ветви Cu. p. Но это совершенно не объясняет, отчего и жилка d получает трахею от Cu. a, несмотря на то, что



Фиг. 8. Схема развития узелка, подузелка и птеростигмы. C — коста, Sc — субкоста, R — радиус, M — медиана, n — nodulus-узелок, nv — узелковая жилка, snv — подузелковая жилка, St — птеростигма.

она выпуклая верхняя жилка. Я не могу настаивать на правильности высказанного мною здесь взгляда, но все же считаю, что данные трахеации не могут здесь служить опровержением и нуждаются в проверке, так как возможно, что трахеи могут вторично заходить и обслуживать совершенно несоответствующую им жилку, что я одинаково допускаю и в случае RS стрекозы Комстока и Нидхэма, который очень возможно является просто вставочной жилкой, (так же, как жилка i), получившей трахею от R. Образование узелка и подузелка, а также слияние пересекшихся косты и субкосты (C,Sc) ясно видны из моих схем на фиг. 8 и, мне кажется, в подробном описании не нуждаются. Птеростигма, по моему мнению, как я уже упоминал в другой статье (21 и 22), образовалась сначала в месте наибольшего сближения косты с субкостой, но когда они слились, то в месте наибольшего сближения радиуса с этой слившейся жилкой.

Другая ветвь *Zygoptera*, тоже совершенно самостоятельно отделившаяся, как и *Anisoptera*, от *Permodonata* пошла по другому эволюционному пути в сторону образования стебельчатого основания крыла и заметного

упрощения его жилкования. Здесь, прежде всего, имело место полное исчезновение треугольника и принятие на себя его функции вышележащим полем q, ограниченным дужкой, M. p., Cu. a. и поперечной жилкой. Cu. a. становится совершенно простым, а Cu. p. вначале сохраняет в основном прежний характер. Затем, где то здесь эволюция снова идет двумя различными путями (фазы II_1 и II_2), один из них в результате приводит к современным формам семейства: *Lestidae* и *Agrionidae*, другой же дает начало сем. *Calopterygidae*. В первом случае происходит слияние в основании Cu. a. + Cu. p., укорачивание веточки d кубитуса постерпор, утрата вставочной жилки i и приближение к остальным жилкам заднекраевой An. жилки. Все эти изменения обусловлены эволюцией, углубившейся в сторону образования стебельчатого основания крыла. Приблизительно к фазе III_1 будет относиться *Kennedya mirabilis* Tillyard, которая в самом начале стебелька имеет еще раздельным Cu. a. от Cu. p. и обозначена у Тиллиарда как Cu_1, сливающийся затем в общую жилку с Cu. p., чтобы около дужки опять отделиться от него в виде самостоятельной жилки. Далее, я считаю, развитие идет уже путем, подробно представленным ранее Тиллиардом в его статье (15) на фиг. 10, т. е. через фазы *Permagrion Hemiphlebia* и приводит к таким современным формам, как *Lestes* и *Agrion* (фаза IV_1).

Эволюция в сторону сем. *Calopterigidae* идет по пути слияния M. a. с R, так что в конечном итоге ее первые ветви (1 и 2) отходят как бы от R. Еще у современной *Pseudophaea*, соответствующей приблизительно фазе III_2 моей схемы, M. a. не сливается с R своей передней ветвью, но последняя уже сильно приближается к нему. Cu. p. здесь в продолжение всего развития сохраняет в основном прежний характер, как у *Permodonata*, и лишь несколько удлиняется так, что поле v отходит дальше к дистальной части крыла, и ограничивающая его жилка становится как раз под жилкой, ограничивающей снаружи поле q (четырехугольник), образуя вертикальные углы q и v.

Многие, возможно, возразят против моей гипотезы развития подотрядов и семейств стрекоз, указав на недостаточность фактов для ее обоснования, но я хочу отметить здесь, что, конечно, это только гипотеза, а не теория, и для ее построения я счел достаточными имеющиеся у меня данные. Я надеюсь, что новые находки ископаемых стрекозоподобных подтвердят в основном мою схему эволюции, и только тогда можно будет назвать ее уже теорией.

Рассмотрев эволюцию стрекозоподобных насекомых, перейдем теперь к анализу развития ветви поденок. Если мы взглянем на то характерное

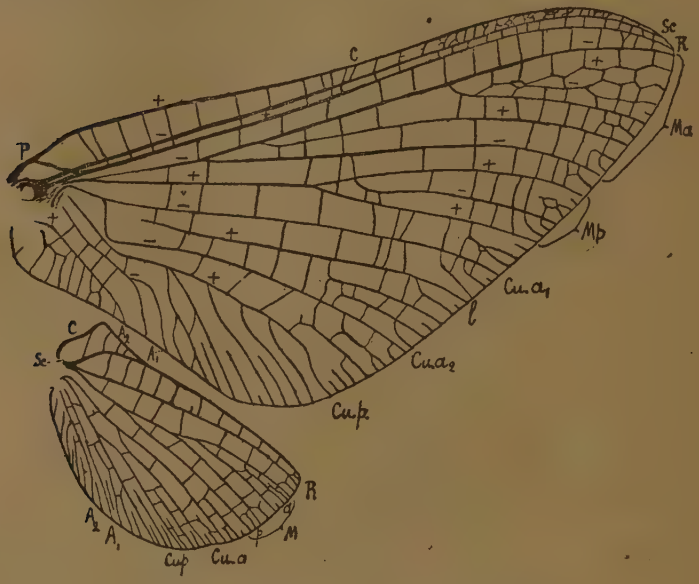
образование и перекрытие (Р) жилок в основной части крыла поденок, особенно хорошо выраженное у рода *Palingenia* (фиг. 9), и сравним его с прекостальным выступом и прекостальной жилкой *Pholidoptilon camense* плюс идущая от нее жилка, пересекающая субкосту, то сразу напрашивается вывод об отождествлении и гомологизации этих образований. Мне кажется, что эта картина в основании крыла у поденок и есть остаток когда-то существовавшего у общего предка стрекоз и поденок прекостального выступа. Я не хочу сказать этим, что *Pholidoptilon camense* является предком равно как стрекоз, так и поденок, нет, отнюдь нет, но во всяком случае

Фиг. 9. *Palingenia longicauda.* Oliv. Правая пара крыльев.

филогенетическая связь ясна, и, конечно, *Pholidoptilon* очень близок к тому общему предку, который дал начало стрекозоподобным насекомым и поденкам. Этого общего предка я и изображаю в гипотетической фазе, показывающей на моей схеме (фиг. 5) переход от *Palaeodictyoptera* к *Protodonata*, *Permodonata* и *Ephemeroptera*.

Я считаю, что SR *Palaeodictyoptera* в процессе развития редуцируется у поденок и наконец исчезает совершенно; М. а. сильно развивается, беря на себя его роль в укреплении крыла. В промежутках между ветвями М. а. и М. р., а также ветвями кубитусов, развивается большое количество вставочных жилок, образующихся, повидимому, из второстепенной сети жилок. Одна из таких вставочных жилок 1 достигает больших размеров и лежит

между характерно широко расставленными ветвями Cu. a. (VI жилки) и своим двуветвистым основанием часто ограничивает большую ячею, сильно напоминающую треугольник стрекоз. Очень возможно, что этот процесс образования треугольника был у общего предка *Permodonata* и *Ephemeroptera*, и только у первых он получил окончательное развитие, а у вторых приостановился. Вот почему я левую сторону треугольника стрекоз и склонен считать именно за вторую ветвь Cu. a. Кубитус постериор (Cu. p.) поденок сильно усложнился в соответствии с изменением формы крыла и область его



Фиг. 10. *Ephemera* sp. Правая пара крыльев.

также снабдилась большим количеством вставочных жилок. Анальные же жилки тут сохранились нормально, как у других насекомых, и обычно бывают в количестве двух A_1, т. е. VIII жилки и A_2 — IX жилки.

Теперь я обращу внимание на то полное соответствие в расположении верхних и нижних жилок у стрекоз и поденок, на которое указывал уже давно Ретенбахер (14), и задам себе вопрос: может ли быть, чтобы жилка, обозначенная мною у поденок как M. a., была RS? Конечно, нет, — она отвечает той самой нижней жилке M. a., которую я описываю у *Permodonata* и *Odonata*, и поэтому Анна Морган была совершенно права, считая ее не за SR, а за M. У многих современных форм *Ephemeroptera*,

особенно на передних крыльях, эта жилка даже не приходит в полный контакт с радиусом, а только подходит к нему очень близко, как это изображено на фиг. 9 и 10. Броньяр также не соглашался с мнением Ретенбахера и считал, что R у поденок простой и рассматривал SR как IV жилку, т. е. совершенно одинаково со мною. В наименовании остальных жилок наши мнения тоже сходятся, за исключением VII и VIII жилок, где в связи с моим новым взглядом на Cu (как VI — Cu. a. и VII — Cu. p.), я рассматриваю эти жилки у приведенных им примеров не всегда одинаково с ним (3).

Насчет того, через какие формы шло развитие крыльев поденок и какие из поденкообразных ископаемых являются их предками, я скажу следующее. Я сильно сомневаюсь в предположении А. В. Мартынова (см. цит. 10, стр. 148, вторая строка снизу), что карбоновые *Triplosobidae* (*Triplosoba*) могли дать начало поденкам. Это, по моему, какая-то боковая ветвь, которая вымерла и прямого отношения к поденкам не имеет. Я скорее склонен искать предка поденок среди тех *Palaeodictyoptera*, которые раньше Броньяром выделялись в подсемейство *Lamproptilida* семейства *Platypteridae*, а теперь Гандлиршем рассматриваются как сем. *Lamproptilidae* (см. цитируемый труд Гандлирша, табл. XII *Lamproptilia Grand'-Euryi* Handl.).

На этом я заканчиваю изложение своих взглядов на эволюцию и жилкование стрекоз и поденок и жду от палеоэнтомологии новых фактов, подкрепляющих их. Здесь я еще замечу, что, мне кажется, было бы целесообразным всех стрекозоподобных насекомых, т. е. *Protodonata*, *Permodonata* и *Odonata* объединить в виде надотряда стрекозоподобных, назвав его новым именем: *Odonatoptera*, так же, как это было сделано Гандлиршем только для двух отрядов *Protodonata* и *Odonata*, объединенных в виде надотряда *Libelluloidea*.

Орел, сентябрь 1931 г.

ДОБАВЛЕНИЕ

Когда настоящая статья была уже вполне закончена, мною была получена статья А. В. Мартынова («О подотряде *Permanisoptera* и его положении», ДАН, 1931, стр. 246), в которой он переименовывает подотряд *Protanisoptera* на *Permanisoptera*, в виду того, что почти одновременно с ним, но все же немного ранее, Карпентер установил подотряд *Protanisoptera* на основании другого насекомого *Ditaxineura* Tillyard.

Статья Карпентера («The Lower Permian Jnsects of Kansas.» Amer. Journ. of Sci., 1931, № 122), вышедшая в феврале 1931 г. и полученная в СССР гораздо позже, естественно не была известна А. В. Мартынову, когда он устанавливал подотряд *Protanisoptera*, также она не была известна и мне при написании настоящей статьи. В личной беседе со мною, А. В. Мартынов высказал предположение, что описанная мною, как представитель отряда *Permodonata* форма *Pholidoptilon*, должна быть отнесена к настоящим *Odonata* в подотряд *Protanisoptera* Carpenter.

В настоящее время, ознакомившись с содержанием статьи Карпентера, я должен отметить, что предположение А. В. Мартынова считаю невозможным. Прежде всего форма *Ditaxineura* слишком совершенна и имеет уже сильно упростившуюся сеть поперечных жилок, кроме того, у нее отсутствует совершенно оригинальный морфологический перекрест C с Sc, птерастигма имеет совсем другой характер, крыловой треугольник отсутствует, также отсутствует и прекостальное поле. То, что Карпентером описывается как прекостальное поле, по моему мнению, является образованием, отвечающим только прекостальному выступу (P) *Pholidoptilon* и, судя по приводимой в его статье фотографии, оно даже ограничено темноокрашенным контуром, отвечающим прекостальной жилке (P). Конечно, чтобы говорить об этом уверенно, надо иметь в руках оригинал. При всем этом *Ditoxineura*, конечно, имеет сходство с *Pholidoptilon* и генетически связана с отрядом *Permodonata*, но объединяться в один подотряд *Protanisoptera* отряда *Odonata* не может. Форма *Ditaxineura*, повидимому, является одной из боковых ветвей, стоящих вне эволюции подотряда *Anisoptera*, и скорее напоминает ту ветвь, которая могла стоять на пути эволюции к подотряду *Zygoptera*, изображенную у меня на фазе I_1 на фиг. 6. Поэтому я и считаю, что отнесение Тиллиардом рода *Ditaxineura* к подотряду *Protozygoptera* ближе к истине, хотя не допускаю, чтобы эта форма стояла на прямой линии развития *Zygoptera*. Что касается подотряда *Anisozygoptera*, то он в основном, по моим представлениям, стоит совершенно отдельно вне линии эволюции *Anisoptera* и *Zygoptera*. Что касается подотряда *Permanisoptera* Martynov, то в виду полного отсутствия основной части крыла у формы, послужившей для установления этого подотряда, определить его положение в филогенетическом дереве стрекоз я считаю невозможным и преждевременным, так как подозреваю, как указывал раньше, что эта форма может оказаться представителем отряда *Permodonata*.

Таким образом в составе отряда *Odonata* я представляю подотряды *Anisozygoptera*, *Protozygoptera*, *Zygoptera*, *Anisoptera* и на основании вышепри-

веденных соображений по поводу сем. *Calopterigidae* думаю, что, возможно, и его надо понимать как самостоятельный подотряд. В таком случае ему следует дать название *Caloptericoptera*.

К более подробному обсуждению взаимоотношений отдельных подотрядов стрекоз я еще надеюсь вернуться в будущем в особой статье, так как в этой статье я хотел осветить только филогению отряда *Odonata* лишь в отношении тех прямых линий эволюции, которые дали современных *Anisoptera* и *Zygoptera*, и широкие вопросы не входили в задачу настоящей статьи.

ОБЪЯСНЕНИЕ ЗНАЧЕНИЯ БУКВ И СОКРАЩЕННЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ НА РИСУНКАХ

C — коста (costa); Sc — субкоста (subcosta); R — радиус (radius); RS — сектор радиуса (sector radii или radii sector); MIV и M. a. — четвертая жилка медиана антериор или антемедиана (mediana anterior или antemediana); MV и M. p. — пятая жилка медиана постериор или истинная медиана (mediana posterior); CuVI и Cu. a. — шестая жилка кубитус антериор или антекубитус (cubitus anterior или antecubitus); CuVII и Cu. p. — седьмая жилка кубитус постериор или истинный кубитус (cubitus posterior). Цифры при обозначениях anterior — a. и posterior—p. или у жилок обозначают номер ветви или сектора главной жилки, напр.: Cu. p_2— значит кубитус постериор второй, т. е. задняя ветвь кубитуса постериор. A. и An — анальные жилки. A_1 — анальная жилка первая, т. е. восьмая жилка, A_2 — анальная вторая, т. е. девятая жилка и т.д., t — крыловой треугольник (triangulus), l — вставочная жилка между Cu.a_1 и Cu. a_2, i — вставочная жилка, кубитуса постериор, d — задняя ветвь кубитуса постериор, q — поле, дающее впоследствии у современных форм четырехугольник (quadriangulum), v — междукубитальное поле, S — ячея, превращающаяся у подотряда *Anisoptera* в подтреугольник (subtriangulum). На фиг. 2 и 3 показатели над буквами обозначают авторов: H — Handlirsch, M — Мартынов, C — Comstok и Needham и Z — Залесский. Знак + (плюс) под жилкой обозначает верхнюю жилку, знак — (минус) — нижнюю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adolph G. Über Insectenflügel. Nova Acta der Ksl. Leopold-Carol. Deutsch. Akad. der Naturf. Bd. XLI, Pars II, Halle, 1879.
2. Brauer u. Redtenbacher I. Ein Beitrag zur Entwickelung des Flügelgeäders der Insecten Zool. Anz., XI. 1888.
3. Brongniart Ch. Recherches pour servir à l'histoire des insectes fossiles des temps primaires précédés d'une étude sur la nervation des ailes des insectes. Saint-Etienne, 1893.
4. Comstock J. H. a. Needham J. G. The wings of Insects. A series of articles on the structure and development of the wings of Insects, with special reference to the taxonomic value of the characters presented by the wings. Reprinte from The American Naturalist, vol. XXXII and vol. XXXIII, 1898—1899, Ithaca, N. Y.
5. The wings of Insects. An Exposition of the Uniform Terminology of the wing veins of Insects and a discussion of the more general characteristics of the wings of the several orders of Insects. Ithaca, N. Y., 1918.
6. Eaton M. A. A revisional monograph of recent *Ephemeridae* or May-flies. Trans. Linn. Soc. London. Sec. ser., v. III, London, 1883.

Оглавление — Sommaire

	стр.
Н. Н. Лузин. О некоторых свойствах перемещающего множителя в методе академика А. Н. Крылова. Часть первая	595
К. Персидский. Об основной теореме теории вероятностей	639
Б. И. Сегал. Об одной аддитивной проблеме	657
И. В. Кротов. Изотермический титровальный калориметр (с 5 фиг.)	669
*Г. А. Надсон. О замене зеленой краски водорослей красной в глубинах моря. К вопросу о хроматической адаптации у водорослей (с резюме на русском яз.)	681
*Е. Я. Рохлина. Две новые водоросли из Черного моря: *Pseudulvella Nadsonii* и *Epicladia pontica* (с 3 фиг. и резюме на русском яз.)	687
Д. В. Соколов. О микроорганизмах в подпочвенных слоях и о биохимических факторах выветривания	693
Ю. М. Залесский. О жилковании крыльев стрекоз и поденок и их филогенетическом развитии (с 10 фиг.)	713

	pag.
*N. Luzin. Sur certaines proprietés du multiplicateur invérsant dans le procédé de Mr. A. Krylov. Première partie	595
*K. Persidskij. Sur le theorème foudamental du calcul des probabilités	639
*B. Segal. Sur un problème additif	657
*I. Krotov. Le microcalorimètre isothermique à titration (avec 5 fig.)	669
G. A. Nadson. Du remplacement de la coloration verte des algues par la coloration rouge dans les profondeurs de la mer. Contribution à l'étude de l'adaptation chromatique des algues (avec un resumé en russe)	681
E. Rochlina. Über zwei neue Algen aus dem Schwarzen Meer: *Pseudulvella Nadsonii* und *Epicladia pontica* (mit 3 fig. und einem russischen Zusammenfassung)	687
*D. Sokolov. Sur les microorganismes des couches sous-jacentes du sol et les facteurs biochimiques de la désaggregation	693
*G. Zalesskij (G. Zalessky). Observation sur la nervation des ailes des libellules et des éphémères et sur leur évolution phylogénétique (avec 10 fig.)	713

Заглавие, отмеченное звездочкой, является переводом заглавия оригинала.
Le titre marqué d'un astérisque est une traduction du titre original.

Цена 3 руб.